TD 7 Trigo et suite classique.

Jeudi 10 Octobre 2024.

Trigo

Exercice 1. [Correction] Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On considère $P_n = \prod_{k=2}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right)$.

1. Montrer que : $\forall n \geqslant 2,\ P_n = \dfrac{1}{2^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$
2. On admet que $\lim_{\square \to 0} \dfrac{\sin(\square)}{\square}$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} P_n$.

Exercice 2. [Correction] Une jolie formule

> Justifier que : $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

> Démontrer par récurrence que $Si\ n \geqslant 2$,

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{.....+\sqrt{2}}}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^n} \qquad \text{Il y a } (n-1) \text{ symboles } \sqrt{\ldots}$$

Exercice 3. On va démontrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

1. Démontrer le par récurrence.
2. Démontrer le, en dérivant n fois, l'égalité : $\cos(x) + i\sin(x) = e^{i\,x}$

Suite classique d'ordre 2

Exercice 4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1492$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 3$

1. Calculer le nombre u_n en fonction de n.
2. Montre que la suite u_n vérifie une relation de récurrence classique d'ordre 2.
   En déduire le nombre u_n en fonction de n.

Exercice 5. [Correction]

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par récurrence qu'il existe **deux entiers** a_n et b_n tels que

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{3}.$$

   On exprimera a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

   Calculer a_0, b_0, et a_1, b_1.

2. Montrer que (a_n) vérifier une relation de récurrence d'ordre 2.
   En déduire a_n en fonction de n.
3. Montrer que $\forall n,\ \ a_n^2 - 3b_n^2 = 1$.

   En déduire qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\left(2+\sqrt{3}\right)^n = \sqrt{N_0} + \sqrt{N_0 - 1}$

Exercice 6. [Correction] On considère la suite $(u_\square)$ définie par

$$u_0 = 2,\ u_1 = 6 \text{ et } u_{n+2} = 6u_{n+1} - 4u_n$$

1. Démontrer que le nombre u_n est un entier pair.
2. Calculer le nombre u_n en fonction de n.
3. Montrer (sans faire d'approximation numérique) que $0 < 3 - \sqrt{5} < 1$..

   On a donc $\left(3-\sqrt{5}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

4. Déduire de ce qui précède que

$$\sin\left[\left(3+\sqrt{5}\right)^n \pi\right] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

   → Méthodologie : Il faut faire le lien entre $\left(3+\sqrt{5}\right)^n \pi$ et ce qui précède

   Avec Q2, on a $\left(3+\sqrt{5}\right)^n$ est lié à ...
   On remplace. Avec Q1 , on peut gérer ....
   On calcule sachant que la fonction Sinus est 2π-périodique. Enfin avec Q3, fini

Complexe

Exercice 7. [Correction] On considère la suite (z_n) définie par

$$z_0 \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$$

Comme z_n est un nombre complexe, on peut écrire $z_n = a_n + ib_n$ ou bien $z_n = \rho_n e^{i\theta_n}$.

1. Calculer ρ_{n+1} et θ_{n+1} en fonction de ρ_n et θ_n
2. Calculer θ_n en fonction de n.
3. Montrer que : $\rho_n = \dfrac{\rho_0}{2^n}\dfrac{\sin(\theta_0)}{\sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)}$.
4. Déterminer la limite de θ_n, ρ_n et z_n.

Correction.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. Récurrence
2. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \dfrac{1}{\infty\sin(0)}$, c'est une FI avec $\sin(0)$ donc va utiliser l'approximation linéaire.

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n+1}[\square + o(\square)]}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\dfrac{\pi}{2} + o\left(\dfrac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé) On fait pat récurrence

$$H\left\langle n\right\rangle : \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{.....+\sqrt{2}}}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^n} \qquad \text{Il y a } (n-1) \text{ symboles } \sqrt{\dots}$$

L'initialisation est facile, on fait l'hérédité.

$\rightarrow$ $\dfrac{H\left\langle n\right\rangle \Rightarrow H\left\langle n+1\right\rangle\ ?}{\text{On suppose } H\left\langle n\right\rangle,}$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On veut montrer } H\left\langle n+1\right\rangle \\[1em] \text{On espère avoir } \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{.....+\sqrt{2}}}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\end{array}}$$

On a

$$\begin{aligned}
\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{.....+\sqrt{2}}}}} &= \sqrt{2+(\text{Ici on reconnait } H\left\langle n\right\rangle)} \\
&= \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^n}} \\
&= \text{Intermédiaire} \\
&= \text{.....formule trigo (duplication) ....} = Final
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

1. On démontre par récurrence

$$H\langle n\rangle : \Big| \text{ Il existe deux entiers } a_n \text{ et } b_n \text{tels que } \left(2+\sqrt{3}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{3}.$$

Initialisation

On a $(2+\sqrt{3})^0 = 1$ je choisis $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$

Hérédité Je suppose que $H_{<n>}$ est vrai.

$$\boxed{\text{On veut trouver } a_{n+1} \text{ et } b_{n+1} \text{ entier tel que } \left(2+\sqrt{3}\right)^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{3}}$$

On veut avoir

$$\begin{aligned}\left(2+\sqrt{3}\right)^{n+1} &= \left(2+\sqrt{3}\right)^n\left(2+\sqrt{3}\right)\\ &\text{On utilise } H\langle n\rangle\\ &= \left(a_n + b_n\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)\\ &= [2a_n + 3b_n] + \sqrt{3}\,[a_n + 2b_n]\end{aligned}$$

Je choisis $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n$ et $b_{n+1} = a_n + 2b_n$ et ce sont bien des entiers ! ! !

De plus

$\left(2+\sqrt{3}\right)^0 = 1 \Rightarrow a_0 = 1$ et $b_0 = 0$

$\left(2+\sqrt{3}\right)^1 = 2+\sqrt{3} \Rightarrow a_1 = 2$ et $b_1 = 1$

2. On sait que $b_{n+1} = a_n + 2b_n$. On va utiliser l'autre relation de récurrence pour calculer b_n est b_{n+1} en fonction des termes de la suite (a_n)

$$a_{n+1} = 2a_n + 3b_n \Rightarrow b_n = \dots$$
et
$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3b_{n+1} \Rightarrow b_{n+1} = \dots$$

L'égalité $b_{n+1} = a_n + 2b_n$ devient (après simplification) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n = 0$.

3. La suite (a_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Équation caractéristique.

On doit résoudre $X^2 - 4X + 1 = 0$.
Après calcul,on trouve que : Les racines sont $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$.

On sait d'après la théorie des suites, qu'il existe 2 scalaires λ et μ tq

$$a_n = \lambda\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \mu\left(2-\sqrt{3}\right)^n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

On a sait de plus que

$$\left.\begin{aligned} a_0 = 1 &\Rightarrow \lambda + \mu = 1\\ a_1 = 2 &\Rightarrow \lambda\left(2+\sqrt{3}\right) + \mu\left(2-\sqrt{3}\right) = 2\end{aligned}\right\} \text{ ainsi } \lambda = \mu = \tfrac{1}{2}$$

$$\text{Conclusion : } a_n = \frac{1}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \frac{1}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)^n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

4. On fait par récurrence (1 étage) : $H_{<n>} : (a_n)^2 - 3(b_n)^2 = 1$.
On en déduit que

$$\begin{aligned}\left(2+\sqrt{3}\right)^n &= a_n + b_n\sqrt{3}\\ &\text{Or } a_n, b_n \text{ sont } >0\\ &= \sqrt{(a_n)^2} + \sqrt{3\,(b_n)^2}\\ &\text{Or } (a_n)^2 - 3(b_n)^2 = 1\\ &= \sqrt{(a_n)^2} + \sqrt{(a_n)^2 - 1}\\ &= \sqrt{N_0} + \sqrt{N_0 - 1} \quad \text{avec } N_0 = (a_n)^2\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 6 (Énoncé) On considère la suite $(u_\square)$ définie par

$$u_0 = 2,\ u_1 = 6 \text{ et } u_{n+2} = 6u_{n+1} - 4u_n$$

1. On fait une récurrence.
2. C'est une suite récurrente d'ordre 2 classique

$$\text{A la fin, on trouve que} \quad u_n = \left(3+\sqrt{5}\right)^n + \left(3-\sqrt{5}\right)^n$$

3. On y va direct

$$3-\sqrt{5} = \frac{(3)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2}{3+\sqrt{5}} = \frac{9-5}{3+\sqrt{5}} > 0$$

ET

$$1-\left(3-\sqrt{5}\right) = \sqrt{5}-2 = \frac{5-4}{\sqrt{5}+2} > 0$$

$$\text{Conclusion : On a bien } \ 0 < 3-\sqrt{5} < 1$$

4. On a le cheminement naturel (**CàD qui suit les indications qui sont assez naturelles**)

$$\begin{aligned}
\sin\left[\left(3+\sqrt{5}\right)^n \pi\right] &= \sin\left[\left(u_n - \left(3-\sqrt{5}\right)^n\right)\pi\right] \\
&= \sin\left[u_n\pi - \left(3-\sqrt{5}\right)^n \pi\right] \\
&\text{Or } u_n \text{ est un nombre pair} \\
&\text{donc on peut écrire} \quad u_n = 2k \\
&= \sin\left[2k\pi - \left(3-\sqrt{5}\right)^n \pi\right] \\
&\text{Or la fonction Sinus est } 2\pi - \text{périodique} \\
&\text{Donc} \\
&= \sin\left[-\left(3-\sqrt{5}\right)^n \pi\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ car } -\left(3-\sqrt{5}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 7 (Énoncé) On considère la suite (z_n) définie par

$$z_0 \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$$

1. On écrit z_n sous forme polaire, CàD $z_n = \rho_n e^{i\theta_n}$

$$\begin{aligned}
z_{n+1} &= \frac{z_n + |z_n|}{2} \\
&= \frac{\rho_n e^{i\theta_n} + \rho_n}{2} \\
&= \frac{\rho_n}{2}\left(e^{i\theta_n} + 1\right) \\
&\text{Argument moitié} \\
&= \frac{\rho_n}{2} e^{i\theta_n/2}\left(e^{i\theta_n/2} + e^{-i\theta_n/2}\right) \\
&= \frac{\rho_n}{2} e^{i\theta_n/2}\left(2\cos\frac{\theta_n}{2}\right) \quad = \rho_n \cos\tfrac{\theta_n}{2}\ e^{i\theta_n/2} = \rho_{n+1} e^{i\theta_{n+1}}
\end{aligned}$$

Je choisis $\rho_{n+1} = \rho_n \cos\dfrac{\theta_n}{2}$ et $\theta_{n+1} = \dfrac{\theta_n}{2}$.

2. On a facilement

$$\begin{aligned}
\theta_n &= \frac{\theta_{n-1}}{2} \\
&\text{C'est une suite Géo} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\theta_{n-2}}{2}\right) = \ldots = \frac{1}{2}..\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\theta_0\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \ \theta_0.
\end{aligned}$$

3. On a la formule de récurrence

$$\rho_n = \rho_{n-1}\cos\left(\frac{\theta_{n-1}}{2}\right) = \rho_n = \rho_{n-1}\cos\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n \theta_0.\right]$$

Donc on montre par récurrence $\rho_n = \rho_0 \dfrac{1}{2^n}\dfrac{\sin(\theta_0)}{\sin(\theta_0/2^n)}$

4. On a

$$\theta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \ \theta_0. \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\rho_n = \rho_0 \frac{1}{2^n}\frac{\sin(\theta_0)}{\sin(\theta_0/2^n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho_0 \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0} \qquad \text{avec } \frac{\sin\square}{\square} \longrightarrow 1$$

$$\text{On imagine que } \ z_n = \rho_n e^{i\theta_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho_0 \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0} e^{i0} = \rho_0 \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0}$$