Question de cours

> Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton.

> Calcul de somme trigo avec les complexes.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le complexe $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$

Soit $k \in \{0, 1, .., n-1\}$. Justifier que : $\left|\omega^k - 1\right| = 2\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$.

En déduire que : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left|\omega^k - 1\right| = \dfrac{2\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$

Rappel : $\sin \square = \mathrm{Im}\left(e^{i\square}\right)$

Autour des fonctions

Exercice 1. [Correction] On considère la fonction f définie par

$$f(x) = x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x)$$

1. Déterminer $\mathscr{D}$, l'ensemble de définition et $\mathscr{D}'$, l'ensemble de dérivabilité de la fonction f.
2. Montrer que le graphe de la fonction f admet la droite $x = \dfrac{1}{2}$ pour axe de symétrie.
3. Déterminer et simplifier f'.
4. On admet que : $\displaystyle\lim_{\square \to 0^+} [\square \ln(\square)] = 0$.
   Déterminer les variations de la fonction f et préciser les limites aux borne de $\mathscr{D}$
5. En déduire, sur $\mathscr{D}$, un encadrement de $x^x\,(1-x)^{1-x}$

Exercice 2. [Correction] Le but de l'exercice est de montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geqslant 2^{n+1}$$

On considère la fonction $f : t \longmapsto (1+t)^n + \left(1 + \dfrac{1}{t}\right)^n$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer et simplifier (CàD FFB) $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de signe et de variation de f puis en déduire le résultat attendu.

Somme

Exercice 3. [Correction] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\binom{n}{k}}{k}$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k}}{k}$ On convient que $\binom{n}{n+1} = 0$
2. Montrer que : $\forall\, n, k \in \mathbb{N}$, avec $0 \leqslant k \leqslant n$
$$\frac{1}{k}\left[\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k}\right] = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}$$
3. En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1}$
4. Montrer que : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Exercice 4. [Correction] On considère la suite (s_n) définie par
$$s_0 = 2 \;\; et \;\; \forall\, n \in \mathbb{N},\;\; s_{n+1} = 1 + \prod_{k=0}^{n} s_k$$

1. Généralités
   (a) Calculer s_1, s_2 et s_3.
   (b) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = s_n^2 - s_n + 1$.
   (c) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $s_n \geqslant 2$.
2. Une somme
   (a) Pour tout n, simplifier $\frac{1}{s_n - 1} - \frac{1}{s_{n+1} - 1}$
   (b) En déduire que la suite $\left(\sum_{n=0}^{N} {}^{1}/_{s_n}\right)$ converge et calculer sa limite.

Exercice 5. [Correction] Le but de l'exercice est de montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geqslant 2^{n+1}$$

1. Montrer que $\forall\, t > 0$, $t + \frac{1}{t} \geqslant 2$.
2. Développer l'expression $\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n$ à l'aide de la formule du binôme de Newton
   puis en déduire le résultat attendu.

Intégrale

Exercice 6. [Correction] On considère la suite (I_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^1 \frac{t}{1+t^n}\,dt$$

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Montrer que la suite (I_n) croissante.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \dfrac{1}{2} - \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^n}\,dt$
4. Montrer, à l'aide d'un encadrement, que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^n}\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

   Que peut-on en déduire ?
5. En peu plus précis.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^n}\,dt = \frac{\ln 2}{n} - \frac{2}{n}\int_0^1 t\ln\left(1+t^n\right)\,dt$

   (b) Montrer que : $\forall x \geqslant 0,\ \ln(1+x) \leqslant x$

   puis que : $\displaystyle\int_0^1 t\ln\left(1+t^n\right)\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

   (c) En déduire la limite, quand $n \to \infty$, de : $n\left(I_n - \dfrac{1}{2}\right)$

Exercice 7. [Correction] *La fonction* tan *est défini à la question Q1*
On définit les suites (I_n) et (S_n) :

$$\forall n \geqslant 0, \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\,dx \quad et \quad S_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

1. La fonction tangente est définie sur $\mathscr{D} = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $\forall x \in \mathscr{D},\ \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$
   (a) Montrer que tan est dérivable sur $\mathscr{D}$ et exprimer $\tan'$ en fonction de tan.

   (b) Montrer que : $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right],\ 0 \leqslant \tan(x) \leqslant 1$.
2. *Lien entre S_n et I_n*
   (a) Pour $k \in \mathbb{N}$, trouver une primitive de $\square'\square^{2k}$.

   En déduire la valeurs de $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \left(1+\tan^2(x)\right)\tan^{2k}(x)\,dx$

   (b) En déduire *sans récurrence* que : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \dfrac{\pi}{4} + (-1)^n I_{n+1}$
3. *On admet que la suite (I_n) est positive et décroissante.*
   (a) Montrer que : $\forall n \geqslant 2,\ I_{n-2} + I_n = \dfrac{1}{n-1}$

   (b) En déduire que la suite (I_n) converge vers 0.

   (c) La suite (S_n) converge-t-elle ?

Bonus Original

Exercice 8. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $a, b > 0$, on appelle *somme parallèle de a et b*, notée $a||b$ le réel : $a||b = \dfrac{ab}{a+b}$

1. Démontrer que l'addition parallèle est associative, CàD que : $\forall\, a, b, c > 0,\ (a||b)\,||c = a||\,(b||c)$.
2. On va de démontrer l'inégalité de Milne, CàD

$$\forall\, a_1, .., a_n, b_1, .., b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{2n},\ \sum_{k=1}^{n} (a_k||b_k) \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) || \left(\sum_{k=1}^{n} k_k\right)$$

   (a) Pour tout $a, b > 0$, déterminer le minimum de la fonction $\left[x \longmapsto a x^2 + b(1-x)^2\right]$.

   (b) En déduire que : $\forall\, a, a', b, b' > 0,\ (a||b) + (a'||b') \leqslant (a+a')||(b+b')$

   (c) En déduire l'inégalité de Milne.

Kulture : Lorsque l'on a 2 résistances R et R' en parallèle,

alors la résistance équivalente est égale à $\dfrac{RR'}{R+R'} = R||R'$.

Solution de l'exercice (Énoncé) On note $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$

1. Soit $k \in \{0,1,..,n-1\}$.

$$\left|\omega^k - 1\right| = \left|e^{i\square} - 1\right|$$

$$= \left|e^{i\square/2} 2i \sin\frac{\square}{2}\right|$$

$$= \left|e^{i\square/2}\right| |2|\ |i| \left|\sin\frac{\square}{2}\right|$$

$$= 1.2.1 \left|\sin\frac{k\pi}{n}\right|$$

or $k \in \{0,1,..,n-1\}$ donc $\frac{k\pi}{n} \in [0,\pi]$

$$= 2\sin\frac{k\pi}{n}$$

2. On a

$$\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right).S = \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right).\sum_{k=0}^{n} 2\sin\frac{k\pi}{n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left[2\sin\frac{k\pi}{n}\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right]$$

Or $2\sin\frac{k\pi}{n}\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) = couple \to Célibataire$

$= \text{Domino} = 2\cos\frac{\pi}{2n}$

Ainsi on a $S = \frac{2\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{2}{\tan\frac{\pi}{2n}}$

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. Comme $f\left(\frac{1}{2} - h\right) = ...$ et $f\left(\frac{1}{2} + h\right) = ...$, on a bien égalité. Ce qui conclut.

2. On peut calculer le nombre $f(x)$ Ssi $\begin{cases} x > 0 \\ 1 - x > 0 \end{cases}$

   Donc la fonction f est définie sur $\mathscr{D} =]0,1[$

   De plus la fonction f est fabriquée avec les fonctions classiques et les opérations usuelles ainsi la fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}' = \mathscr{D}$.

   On a $\forall x \in \mathscr{D},\ f'(x) = \ln(x) - \ln(1-x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$

3. On a

$$\frac{x}{1-x} \geqslant 1 \iff \frac{x}{1-x} - 1 \geqslant 0$$
$$\iff \frac{2x-1}{1-x} \geqslant 0$$

On fait un bô tableau de signe

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$\frac{2x-1}{1-x}$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	

$\iff x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$

On a : $f'(x) \geqslant 0 \iff \ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right) \geqslant 0 \iff \dfrac{x}{1-x} \geqslant 1 \iff x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right[$

4. On a

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x)\right) = 0 + 0 = 0$$

et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0$ à cause de la symétrie. Ainsi on a le tableau

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f(x)$	0 $\searrow$	$-\ln(2)$	$\nearrow$ 0

5. Pour tout $x \in \mathscr{D}$, on a $x^x\,(1-x)^{1-x} = e^{x\ln(x)}e^{(1-x)\ln(1-x)} = e^{x\ln(x)+(1-x)\ln(1-x)} = e^{f(x)}$

Le tableau de variation assure que : $\forall x \in \mathscr{D},\ -\ln(2) \leqslant f(x) \leqslant 0$,

Ainsi on a $\forall x \in \mathscr{D},\ \underbrace{e^{-\ln 2}}_{=1/2} \leqslant x^x\,(1-x)^{1-x} \leqslant \underbrace{e^0}_{=1}$

Solution de l'exercice 2 **(Énoncé)** On considère la fonction $f : t \longmapsto (1+t)^n + \left(1+\dfrac{1}{t}\right)^n$

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[(1+t)^n + \left(1+\frac{1}{t}\right)^n\right] \\ &= n(1+t)^{n-1} + \frac{-1}{t^2}n\left(1+\frac{1}{t}\right)^{n-1} \\ &= n(1+t)^{n-1} + \frac{-1}{t^2}n\left(\frac{1+1}{t}\right)^{n-1} \\ &= n(1+t)^{n-1}\left[1-\frac{1}{t^{n+1}}\right] \\ &= n(1+t)^{n-1}\left[\frac{t^{n+1}-1}{t^{n+1}}\right] \end{aligned}$$

2. D'après le propriétés des monôme, on sait que : $t^{n+1}-1 \geqslant 0$ Ssi $t \geqslant 1$

   D'où le tableau

x	0		1		∞
sgn f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	

   Conclusion : $\forall\, x > 0,\ f(t) \geqslant f(1) = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$

   On applique cette inégalite avec $t = \dfrac{a}{b} > 0$, ainsi on a $\left(1+\dfrac{a}{b}\right)^n + \left(1+\dfrac{b}{a}\right)^n \geqslant 2^{n+1}$

Solution de l'exercice 3 **(Énoncé)**

1. A cause de la convention, $\dbinom{n}{n+1} = 0$

   ainsi $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\dfrac{\binom{n}{k}}{k} = \sum\limits_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\dfrac{\binom{n}{k}}{k}$

   On a donc

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{\binom{n+1}{k}}{k} - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{\binom{n}{k}}{k}$$

On regroupe les sommes

$$= \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{\binom{n+1}{k}-\binom{n}{k}}{k}$$

2. On a

$$\frac{1}{k}\left[\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k}\right] = \frac{1}{k}\left[\frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} - \frac{(n)!}{k!\,(n-k)!}\right]$$

$$= \frac{1}{k}\frac{(n)!}{k!\,(n-k)!}\left[\frac{(n+1)}{(n+1-k)} - 1\right]$$

$$= \frac{1}{k}\frac{(n)!}{k!\,(n-k)!}\left[\frac{k}{(n+1-k)}\right]$$

$$= \frac{(n)!}{k!\,(n+1-k)!} = \frac{1}{n+1}\frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}$$

3. On a donc

$$S_{n+1}-S_n=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{\binom{n+1}{k}-\binom{n}{k}}{k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\binom{n+1}{k}$$

$$=\frac{-1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k$$

$$=\frac{-1}{n+1}\left[\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k-\underbrace{1}_{k=0}\right]=\frac{-1}{n+1}\left[(1-1)^{n+1}-1\right]=\frac{1}{n+1}$$

On a maintenant

$$S_n-S_{n-1}=\frac{1}{n}$$
$$S_{n-1}-S_{n-2}=\frac{1}{n-1}$$
$$\vdots$$
$$S_2-S_1=\frac{1}{2}$$

On somme les égalités et on simplifie ainsi

$$S_n-S_1=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$$
$$\implies S_n=S_1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

1. Généralités
   (a) On a $s_1=3$, $s_2=7$ et $s_3=43$.
   (b) Pour tout n, on a

$$s_{n+1}=1+\prod_{k=0}^{n}s_k$$
$$=1+s_0s_1s_2...s_{n-1}s_n$$
$$\textit{Or } s_{\square+1}=1+\prod_{k=0}^{\square}s_k$$
$$\textit{Donc } s_n=1+s_0s_1s_2...s_{n-1}$$
$$=1+(s_n-1)s_n=s_n^2-s_n+1$$

   (c) On fait une récurrence.

2. Une somme
   (a) Pour tout n, on a

$$\frac{1}{s_n-1}-\frac{1}{s_{n+1}-1}=\frac{s_{n+1}-1-[s_n-1]}{(s_n-1)(s_{n+1}-1)}$$
$$=\frac{(s_n^2-s_n+1)-s_n}{(s_n-1)(s_{n+1}-1)}$$
$$=\frac{(s_n-1)^2}{(s_n-1)((s_n^2-s_n+1)-1)}$$
$$=\frac{(s_n-1)^2}{(s_n-1)(s_n(s_n-1))}=\frac{1}{s_n}$$

(b) Avec les dominos, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} {}^{1}/_{s_n} &= \sum_{n=0}^{N}\left[\frac{1}{s_n-1}-\frac{1}{s_{n+1}-1}\right]\\ &= \frac{1}{s_0-1}-\frac{1}{s_{N+1}-1}\end{aligned}$$

De plus $\lim\limits_{N\to\infty} s_N = \infty$ <u>oups j'avais oublié de faire démontrer</u>

Ainsi on a $\lim\limits_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} {}^{1}/_{s_n} = \dfrac{1}{s_0-1} = \dfrac{1}{2-1} = 1$

Solution de l'exercice 5 (Énoncé) 1. Pour tout $t>0$, on a :

$$\left(t+\frac{1}{t}\right)-2=\frac{t^2-2t+1}{t}=\frac{(t-1)^2}{t}\geqslant 0 \qquad \text{car } t>0$$

2. On a

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1+\frac{b}{a}\right)^n &= (1+\gamma)^n+\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)^n \qquad \textit{avec } \gamma = {}^{a}/_{b}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\gamma^k+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{\gamma^k}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[\gamma^k+\frac{1}{\gamma^k}\right]\\
&\qquad \textit{Or } \gamma^k+\frac{1}{\gamma^k}\geqslant 2 \textit{ d'après Q1.a avec } t=\gamma^k>0\\
&\geqslant \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[2]\\
&\geqslant 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1)^k=2(1+1)^n=2^{n+1}
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 6 (Énoncé) On considère la suite (I_n) définie par

$$I_n=\int_0^1\frac{t}{1+t^n}dt$$

1. On a

$$I_0=\int_0^1\frac{t}{1+1}dt=\int_0^1 Monome\, dt$$

$$I_2=\int_0^1\frac{t}{1+t^2}dt=\int_0^1\frac{n'}{n}dt$$

$$I_1=\int_0^1\frac{t}{1+t}dt=\int_0^1\left[\text{Décomposition en élément simple}\right]dt$$

2. On a

$$\begin{aligned}
I_{n+1}-I_n &= \int_0^1\frac{t}{1+t^{n+1}}dt-\int_0^1\frac{t}{1+t^n}dt\\
&=\int_0^1\left[\frac{t}{1+t^{n+1}}-\frac{t}{1+t^n}\right]dt\\
&=\int_0^1\left[t\frac{(1+t^n)-(1+t^{n+1})}{(1+t^{n+1})(1+t^n)}\right]dt\\
&=\int_0^1\left[t\frac{t^n-t^{n+1}}{(1+t^{n+1})(1+t^n)}\right]dt\\
&=\int_0^1\left[t.t^n\frac{1-t}{(1+t^{n+1})(1+t^n)}\right]dt
\end{aligned}$$

Or $\left[t.t^n\dfrac{1-t}{(1+t^{n+1})(1+t^n)}\right]$ est $\geqslant 0$ sur $[0,1]$
donc l'intégrale est $\geqslant 0$ Fini

3. On a $\int_0^1 t\,dt = ... = \frac{1}{2}$. Ainsi on a

$$\frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^n}dt = \int_0^1 t\,dt - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^n}dt$$

$$= \int_0^1 \left[t - \frac{t^{n+1}}{1+t^n}\right] dt$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{t\left(1+t^n\right) - t^{n+1}}{1+t^n}\right] dt$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{t}{1+t^n}\right] dt = I_n$$

4. On a

   Si $t \in [0,1]$, $0 \leqslant \frac{t^{n+1}}{1+t^n} \leqslant \frac{t^{n+1}}{1+0} = t^{n+1}$
   On intègre l'inégalité sur $[0,1]$

$$Ainsi\ 0 \leqslant I_n - \frac{1}{2} \leqslant \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^n}dt$$

$$\leqslant \int_0^1 t^{n+1}dt = \left[\frac{t^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = \frac{1}{n+2}$$

   Comme $Majoration = \frac{1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a avec le théorème des deux gendarmes $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.

5. En peu plus précis.
   (a) On fait une IPP

$$u' = \frac{t^{n-1}}{1+t^n} \rightsquigarrow\rightsquigarrow u = \frac{1}{n}\ln\left(1+t^n\right)$$

$$v = t^2 \quad \rightsquigarrow\rightsquigarrow v' = 2t$$

   A finir

   (b) On utilise les intégrales avec $\ln(1+x) = \ln(1+x) - \ln 1 = \int_1^{1+x} \frac{1}{t}dt$

   (c) On va montrer que :

$$Quotient = \frac{Petit}{gros} = \int_0^1 t\ln\left(1+t^n\right)dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

   On utilise l'inégalité précédente,
   ainsi $t \in [0,1]$, $0 \leqslant t\ln\left(1+t^n\right) \leqslant t.t^n$
   On intègre l'inégalité sur $[0,1]$

$$\text{On a} \quad 0 \leqslant \int_0^1 t\ln\left(1+t^n\right)dt \leqslant \int_0^1 t.t^n\,dt$$

$$\leqslant \left[\frac{t^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = \frac{1}{n+2}$$

   Avec le théorème des 2 gendarmes $\int_0^1 t\ln\left(1+t^n\right)dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Fini.

Solution de l'exercice 7 (Énoncé) On définit la suite (I_n) par

$$\forall n \geqslant 0, \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\,dx.$$

1. Généralité sur I_n

(a) On minore l'intégrale.

(b) On a $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\,[\tan x - 1]\,dx$, puis on minore l'intégrale.

(Ainsi on pourrait conclure que la suite $(I_\square)$ converge vers une limite $\ell \geqslant 0$.)

2. On a

→ On a

$$1+\tan^2 x \overset{\text{Une Primitive}}{\rightsquigarrow} \tan x$$

$$\left(1+\tan^2 x\right)\tan^n x \overset{\text{Une Primitive}}{\rightsquigarrow} \frac{1}{n+1}(\tan x)^n$$

On a donc

$$\begin{aligned} I_n + I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\tan^n(x) + \tan^{n+2}(x)\right] dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[1+\tan^2(x)\right]\tan^n(x)\,dx = \left[\frac{1}{n+1}(\tan x)^n\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

3. Convergence de I_n.

(a) On a

→ D'une part

Comme $0 < I_{n+2}$, on a $\quad I_n \leqslant I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$

→ D'autre part

Comme $I_{n+2} < I_n$, on a $\quad I_n + I_{n+2} \leqslant I_n + I_n$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} \leqslant 2I_n$$

(b) Les gendarmes

4. On considère la suite $(S_\square)$ définie à l'aide de la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

(a) On sait que $I_\square + I_{\square+2} = \dfrac{1}{\square+1}$ donc $\dfrac{1}{2k+1} = I_{2k} + I_{2k+2}$

Ainsi avec les dominos, on a $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \dots. = I_0 + (-1)^n I_{2n+2}$

(b) On sait que $I_\square \underset{\square\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $I_{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Conclusion : $S_n = I_0 + (-1)^n I_{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

Solution de l'exercice 8 (Énoncé) L'inégalité de Milne

1. On a

$$(a||b)||c = \frac{\dfrac{ab}{a+b}c}{\dfrac{ab}{a+b}+c} = \frac{abc}{ab+bc+ca}$$

$$et$$

$$a||(b||c) = \frac{a\dfrac{bc}{b+c}}{a+\dfrac{bc}{b+c}} = \frac{abc}{ab+bc+ca}$$

Donc l'addition parallèle est bien associative.

2. (a) Comme $a x^2 + b(1-x)^2 = (a+b)x^2 - 2bx + b$, on sait que le minimum est atteint lorsque $x = \dfrac{2b}{2(a+b)}$, ainsi il vaut

$$(a+b)\left(\frac{b}{(a+b)}\right)^2 - 2b\left(\frac{b}{(a+b)}\right) + b = \frac{b^2}{a+b} - \frac{2b^2}{a+b} + b = \frac{ab}{a+b} = a||b$$

$$\boxed{\textbf{Conclusion} : a||b = \text{ Minimum sur } \mathbb{R} \text{ de } a\,x^2 + b\,(1-x)^2 = \min\left(a\,x^2 + b\,(1-x)^2\right)}$$

(b) Pour tout x, on a

$$\begin{aligned}(a+a')\,x^2 + (b+b')\,(1-x)^2 &= [a\,x^2 + b\,(1-x)^2] + [a'\,x^2 + b'\,(1-x)^2] \\ &\geqslant \underbrace{\min\left(a\,x^2 + b\,(1-x)^2\right) + \min\left(a'\,x^2 + b'\,(1-x)^2\right)}_{=(a||b)+(a'||b')}\end{aligned}$$

Donc $(a||b) + (a'||b')$ minore $(a+a')\,x^2 + (b+b')\,(1-x)^2$, c'est donc plus petit que le minimum, ainsi

$$\textbf{Conclusion} : (a||b) + (a'||b') \leqslant \min\left((a+a')\,x^2 + (b+b')\,(1-x)^2\right) = (a+a')||(b+b')$$

(c) On fait une récurrence.