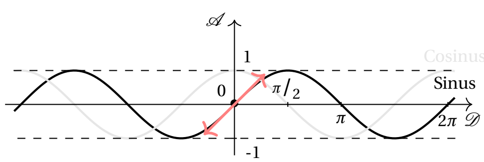
Trigo et Arc-Trigo.

1 Les fonctions Sinus et Cosinus.

1.1 Généralités.

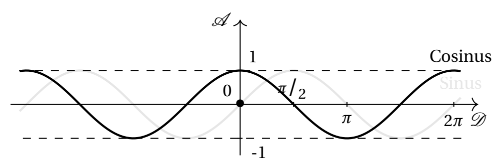
Théorème 1. Les fonctions Sinus et Cosinus

Sinus



La fonction $Sinus$ est dérivable, impaire, 2π-périodique et $\sin(0) = 0$.

Cosinus



La fonction $Cosinus$ est dérivable, paire, 2π-périodique et $\cos(0) = 1$.

Les fonctions Sinus et Cosinus sont définies de $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathscr{A} = \mathbb{R}$
Plus précisément, on a $\mathrm{Im}(Sinus) = [-1, 1]$

Formulaire classique.

> On a $cos' = -sin$ et $sin' = +cos$.

> $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

> Les formules d'Euler :
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \quad et \quad e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$$

> Les formules de Moivre :
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad et \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

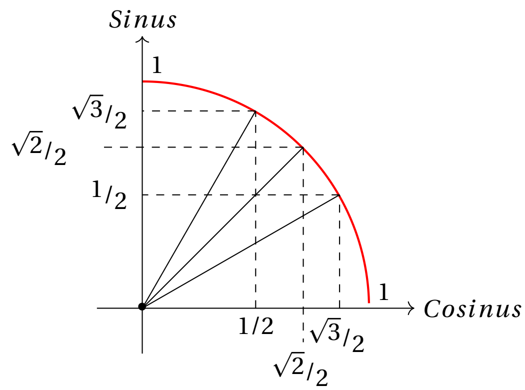
Kulture. Soit $n \in \mathbb{N}$

> Chebychev : $\cos(n\theta)$ est un polynôme en $\square = \cos\theta$.

> Dérivée n-ième :
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \text{ et } \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

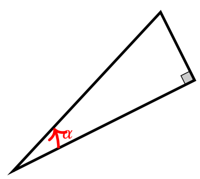
Les valeurs particulières des fonctions Cosinus et Sinus

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Définition 2. Pour la Physique, la SI, la Kulture et la Gloire.

Les fonctions Cosinus et Sinus sont définies géométriquement.



On sait que

$$\cos(\alpha) = \frac{adj}{hyp} \qquad \sin(\alpha) = \frac{opp}{hyp}$$

Il y a aussi : $\tan(\alpha) = \dfrac{opp}{adj}$

1.2 Les équations.

Définition 3. Congruence : Définition, notation, manipulation.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On dit que a et congru b modulo 2π, noté $a \equiv b \mod [2\pi]$ Ssi

$$a \equiv b \mod [2\pi] \iff \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } a = b + k2\pi$$

Calculs classiques.

$$\begin{aligned} 3x+5 \equiv \frac{\pi}{2} \mod [2\pi] &\iff 3x \equiv \left(\frac{\pi}{2} - 5\right) \mod [2\pi] \\ &\iff x \equiv \frac{\pi/2 - 5}{3} \mod [2\pi/3] \\ &\iff \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = \left(\frac{\pi/2 - 5}{3}\right) + k\frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Théorème 4. Équations Trigonométrique.

Attention : les fonctions $Sinus$ et $Cosinus$ ne sont pas bijectives

Donc $\cos(X) = \cos(a) \not\Longleftrightarrow X = a$

$>$ $\cos(X) = 1 \iff x \equiv 0 \mod [2\pi]$

$>$ $\cos(X) = 0 \iff X \equiv \pi/2 \mod [\pi]$

$>$ $\cos(X) = -1 \iff x \equiv \pi \mod [2\pi]$

$>$ $\sin(X) = 1 \iff x \equiv \pi/2 \mod [2\pi]$

$>$ $\sin(X) = 0 \iff X \equiv 0 \mod [\pi]$

$>$ $\sin(X) = -1 \iff x \equiv -\pi/2 \mod [2\pi]$

Plus généralement

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \iff \left[\begin{array}{l} x \equiv \pi/3 \bmod [2\pi] \\ ou \\ x \equiv -\pi/3 \bmod [2\pi] \end{array}\right] \qquad \cos(x) = \cos(a) \iff \left[\begin{array}{l} x \equiv a \bmod [2\pi] \\ ou \\ x \equiv -a \bmod [2\pi] \end{array}\right]$$

1.3 Trigonométrie et Chebychev

Théorème 5. Trigonométrie classique.

Basique : $\cos(a+b) = C_a C_b - S_a S_b$ et $\sin(a+b) = S_a C_b + C_a S_b$

$>$ Duplication.

$>$ Trop de Produit $\rightsquigarrow$ Plus de produit.

$>$ Le grand remplacement : $\cos(x) = \mathrm{Re}\left(e^{ix}\right)$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{ou/et} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Théorème 6. Chebychev.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Il existe un *unique* polynôme T_n tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(n\theta) = P(\square)$ avec $\square = \cos\theta$

De plus les polynômes T_n vérifie la relation de récurrence d'ordre 2 :

$$T_0(X) = 1,\ T_1(X) = X \text{ et } \forall\ n \in \mathbb{N},\ T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1} - T_n(X)$$

1.4 Exercices.

Exercice 1. Placer les angles sur le cercle trigonométrique et calculer : $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$, $\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

Exercice 2.

1. Vérifier que : la fonction $h : x \mapsto \cos(x)\sin(x)$ est π-périodique.
2. Déterminer les périodes de la fonction $f : x \mapsto \sin\left(\frac{5}{3}x\right)$.

Exercice 3. Relier les angles a des angles "connus" puis calculer : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Exercice 4. Soit $\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ tel que $\cos(\alpha) = -4/5$

1. Calculez $\sin(\alpha), \tan(\alpha)$.
2. Calculez $2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + 3\sin(7\pi - \alpha) - \cos\left(7\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$
3. Avez vous un argument qui justifie l'existence de α ? A-t-on unicité de α ?

Exercice 5. On va démontrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

1. Démontrer le par récurrence.
2. Démontrer le, en dérivant n fois, l'égalité : $\cos(x) + i\sin(x) = e^{ix}$

Exercice 6.

1. On note $a_n = \cos\left(2^n\right)$. Calculer a_{n+1} en fonction de a_n
2. On note $b_n = \cos\left(\frac{1}{2^n}\right)$. Calculer b_{n+1} en fonction de b_n

Exercice 7.

> Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\,dx$ et $\displaystyle\frac{d^n}{dx^n}\left[\sin^2(x)\right]$.

> De même mais avec $\cos^3(x)$.

Exercice 8.

1. Montrer que : $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$ et $\sin(3x) = \sin(x)\left(4\cos^2(x) - 1\right)$.
2. Plus généralement montrer Chebychev, CàD $\cos(n\theta)$ est un polynôme en $\square = \cos\theta$.

Exercice 9. [Correction] On considère $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(k)$

1. Calculer S_n en utilisant une somme géo.
2. Calculer $\sin\left(\frac{1}{2}\right) S_n$ puis en déduire S_n.

Exercice 10. [Correction] Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On considère $P_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right)$.

1. Montrer, *par récurrence*, que : $\forall\, n \geqslant 2,\ P_n = \dfrac{1}{2^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$.
2. On sait que : $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$. Montrer, *directement*, que : $\forall\, n \geqslant 2,\ P_n = \dfrac{1}{2^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$.
3. On admet que $\dfrac{\sin\gamma}{\gamma} \xrightarrow[\gamma\to 0]{} 1$.
   Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P_n$.

2 La fonction Tangente.

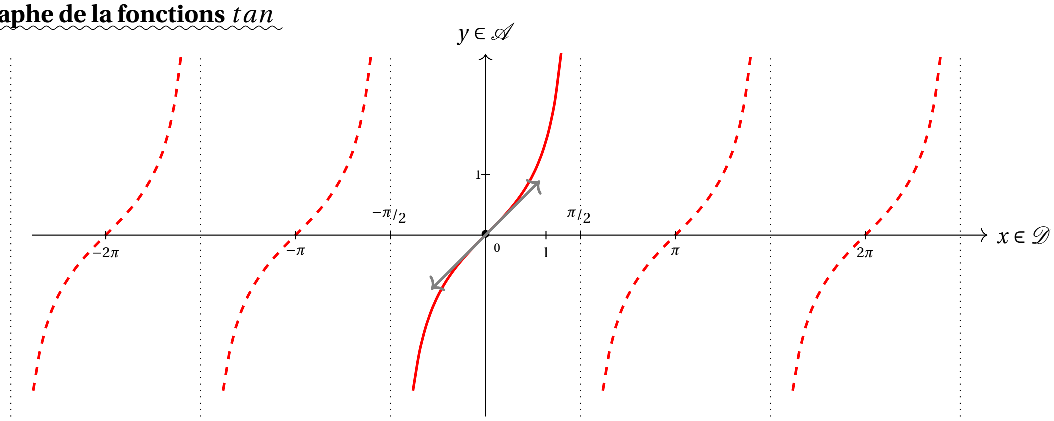
2.1 La fonction Tangente.

Théorème 7. Définition et propriétés de tan **?**

La fonction tangente, notées tan, est définie de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall\, x \in \mathscr{D}, \quad \tan(x) \overset{def}{=} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Graphe de la fonctions tan



De plus

> $\mathscr{D} = \mathbb{R} - \left\{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{2}+\pi, \pm\frac{\pi}{2}+2\pi, ...\right\} = \; ... \cup \left]\frac{-3\pi}{2}, -\frac{-\pi}{2}\right[\cup \underbrace{\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[}_{Intervalle\ principal} \; cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\cup ....$

> La fonction tan est π-périodique, impaire sur $\mathscr{D}$, $\tan(0) = 0$

La fonction tan est strictement croissante sur son intervalle principale de définition

> La fonction tan est dérivable et même C^∞ sur $\mathscr{D}$
et $\forall\, x \in \mathscr{D}, \quad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$

> On lit sur le graphe $Im(tan) =]-\infty, \infty[$.

> La fonction tan réalise une bijection strict croissante de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$

> L'équation $\tan(X) = b$ admet une unique solution, notée $\arctan(b)$, dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Les valeurs particulières de la fonction Tangente

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Non défini

Théorème 8. Équation-Trigo avec tangente.

> Équations avec tan. Soit $b \in b\mathbb{R}$

On a le résultat simple et général.

$$\tan(X) = b \iff X \equiv \underbrace{\arctan(b)}_{\text{Sol} \in \text{principale}} \mod [\pi]$$

Applications :

> $\tan(X) = 0 \iff x \equiv 0 \mod [\pi]$

> $\tan(X) = 1 \iff x \equiv \frac{\pi}{4} \mod [\pi]$

> $\tan(X) = -1 \iff x \equiv -\frac{\pi}{4} \mod [\pi]$

> Trigonométrie avec tan.

- $\tan(a+b) = \cdots = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$
- Pour les intégrales trigo, le changement de variable en $u = \tan\left({}^{t}/_{2}\right)$

> kulture : On sait que : $C^2+S^2=1$ et $T = {}^{S}/_{C}$. On en déduit

$C^2+S^2=1 \implies C = \pm\sqrt{1-S^2}$

$C^2+S^2 = C^2+T^2C^2 = C^2\left(1+T^2\right) = 1 \implies C = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1+T^2}}$

$C^2+S^2 = \left(\dfrac{S}{T}\right)^2 + S^2 = S^2\left(\dfrac{1+T^2}{T^2}\right) = 1 \implies S = \pm\dfrac{T}{\sqrt{1+T^2}}$

2.2 Exercices

Exercice 11. [Correction] On se propose de résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation

$$(E) \quad \tan X = \sqrt{2}+1$$

Soit x fixé vérifiant $\tan x = \sqrt{2}+1$

1. Intermédiaire.
   (a) Montrer : $\tan(2x) = -1$
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation (E') $\tan(2X) = -1$.
2. Comme à la question 1) on a une implication, CàD

$$\left[\tan x = \sqrt{2}+1 \implies \tan(2x) = -1\right],$$

   ainsi les solutions de (E) se trouvent parmi celles de $\left(E'\right)$ mais il faut trier.
   (a) Montrer qu'il existe $\theta \in \left]0, \pi/2\right[$
   tel que $\tan x = \sqrt{2}+1 \iff x \equiv \theta \mod [\pi]$
   (b) Déterminer θ.

Exercice 12. À l'aide du changement de variable $u = \tan\left({}^{t}/_{2}\right)$, calculer les intégrales suivantes

$$\int^x \frac{1}{\sin(t)}\,dt \quad \text{et} \quad \int^x \frac{1}{\cos(t)}\,dt$$

3 Arc-Trigo

3.1 Arc-tangente

Définition 9. Le nombre $\arctan(a)$

Soit $b \in \mathbb{R}$.

$$\arctan(b) = \left| \begin{array}{c} \textit{l'unique solution dans } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ \textit{de l'équation } \tan(X) = b \end{array} \right.$$

Donc le nombre $\arctan(a)$ a les propriétés suivantes

> le nombre $\arctan(b)$ appartient à $]-\pi/2, \pi/2[$

> le nombre $\arctan(b)$ est UNE solution de l'équation $\tan(X) = b$
donc $\forall\, b \in \mathbb{R},\ \tan\Big(\arctan(b)\Big) = b$

Théorème 10. La fonction Arc-Tangente

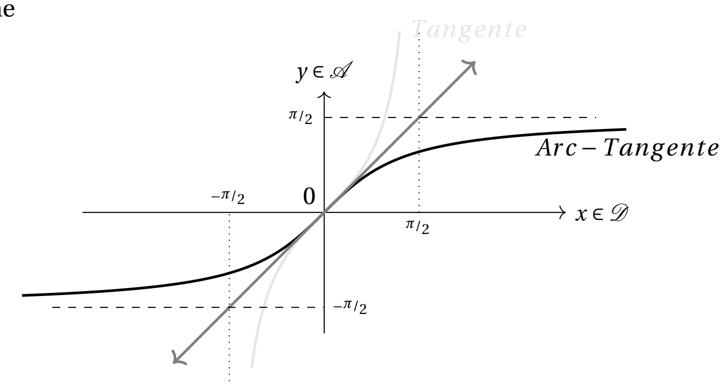
La fonction $Arc-tangente$ est définie par

$$\forall\, x \in \mathscr{D}, \quad \arctan : x \longmapsto \arctan(x)$$

Propriétés.

> Comme tan réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$
La fonction arctan réalise une bijection de $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

On a le graphe



La fonction arctan est strictement croissante, impaire sur $\mathbb{R}$, ainsi $\arctan(0) = 0$.

> La fonction arctan est définie, continue, dérivable et même C^∞ sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

$$\text{et} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

3.2 Arc-sinus.

Définition 11. Le nombre $\arcsin(a)$
Soit $a \in [-1, 1]$.

$$\arcsin(a) = \left| \begin{array}{l} \textit{l'unique solution dans } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ \textit{de l'équation } \sin(X) = a \end{array} \right.$$

Donc le nombre $\arcsin(a)$ a les propriétés suivantes

> $\arcsin(a)$ appartient à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

> $\arcsin(a)$ est solution de l'équation $\sin(X) = a$ donc on a

$$\forall\, a \in [-1, 1], \quad \sin(\arcsin(a)) = a$$

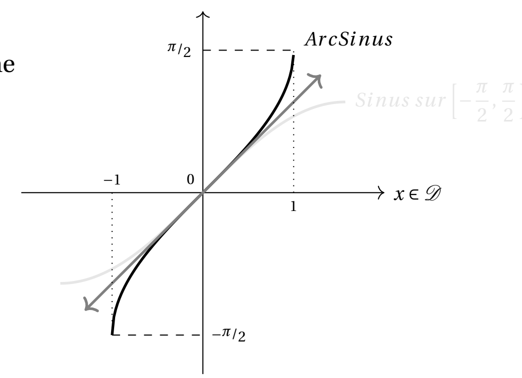
Théorème 12. La fonction $ArcSinus$
La fonction $ArcSinus$ notée arcsin est définie sur $\mathscr{D}$ par

$$\forall\, x \in \mathscr{D}, \quad \arcsin : x \longmapsto \arcsin(x)$$

Propriétés.

> Comme Sinus réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$
La fonction arcsin réalise une bijection de $\mathscr{D} = [-1, 1]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

On a le graphe



La fonction arcsin est strictement croissante, impaire sur $\mathscr{D} = [-1, 1]$
ainsi $\arcsin(0) = 0$.

> La fonction arcsin est définie, continue sur $\mathscr{D} = [-1, 1]$,
dérivable et même C^∞ sur $\mathscr{D}' =]-1, 1[$

$$\text{et} \quad \forall\, x \in \mathscr{D}' =]-1, 1[, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

3.3 Arc-cosinus.

Définition 13. Le nombre $\arccos(a)$

Soit $a \in [-1, 1]$.

$$\arccos(a) = \left| \begin{array}{l} \textit{l'unique solution dans } [0,\pi] \\ \textit{de l'équation } \cos(x) = a \end{array} \right.$$

La nombre ArcCosinus de a, noté $\arccos(a)$ est l'unique solution dans $[0,\pi]$ de l'équation

$$\cos(x) = a$$

Donc le nombre $\arccos(a)$ a les deux propriétés suivantes

> $a \in Im(\cos) = [-1, 1]$ afin que l'équation $\cos(x = a)$ ait des solutions

> $\arccos(a)$ appartient à $[0,\pi]$

> $\arccos(a)$ est solution de l'équation $\cos(x) = a$ donc on a

$$\forall\, a \in [-1,1], \quad \cos(\arccos(a)) = a$$

Théorème 14. La fonction $ArcCosinus$

La fonction $ArcCosinus$ notée arccos est définie sur $\mathscr{D}$ par

$$\forall\, x \in \mathscr{D}, \quad \arccos : x \longmapsto \arccos(x)$$

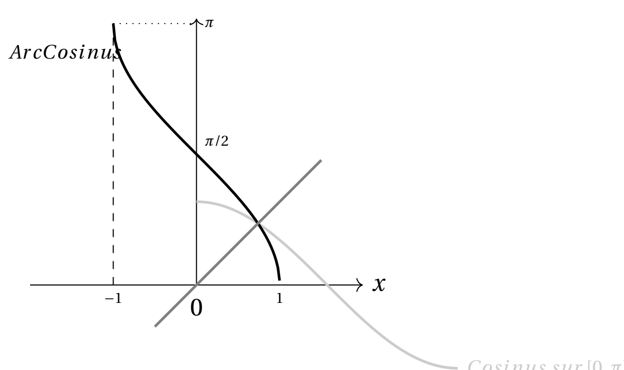
La fonction $ArcCosinus$ a les propriétés suivantes

> La fonction $ArcCosinus$ est définie, continue sur $\mathscr{D} = [-1, 1]$
> et dérivable et même C^∞ sur $\mathscr{D}' =]-1, 1[$ et

$$\forall\, x \in \mathscr{D}' =]-1,1[, \quad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

> La fonction arccos est strictement décroissante sur $\mathscr{D} = [-1, 1]$.

> On a le graphe



3.4 Arc-Exos.

Exercice 13. *Les questions sont indépendantes.*

1. Montrer que : $\forall\, x \in [-1,1],\ \arccos(x) + \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$
2. Démontrer que : $\forall\, x \in [0,1],\ \arcsin\sqrt{x} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\arcsin(2x-1)$
3. Montrer que : $\forall\, 0 \leqslant x,\ \dfrac{x}{1+x^2} \leqslant \arctan(x)$

Exercice 14. [Correction] On va montrer, de deux manières différentes, que :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad \arctan(p+1) - \arctan(p) = \arctan\left(\frac{1}{1+p+p^2}\right)$$

1. Méthode 1. A l'aide d'une étude de fonction, montrer l'égalité.
2. Méthode 2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Je note : $A = \arctan\left(\dfrac{1}{1+p+p^2}\right)$ et $B = \arctan(p+1) - \arctan(p)$.

   Montrer que A et B sont des solutions de l'équation $\tan(X) = \dfrac{1}{1+p+p^2}$

   Encadrer A et B. Conclure.
3. Application : Simplifier puis calculer la limite quand $n \to \infty$ de : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$

Exercice 15. [Correction] Le but de l'exercice est de calculer $A = \arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3)$

1. Montrer que A est une solution de l'équation $\tan(X) = 0$
2. Résoudre l'équation.
3. Encadrer A, puis en déduire la valeurs de A.

Exercice 16. [Correction] On va démontrer la formule de Machin

$$\text{CàD} \quad 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Kulture : John Machin (1680-1751), mathématicien anglais, a réussi à calculer, à la main, 100 décimales de π en 1706 grâce à cette relation.

Je note $\alpha = \arctan\left(\dfrac{1}{5}\right)$ et $\beta = \arctan\left(\dfrac{1}{239}\right)$

1. Un peu de calcul.
   (a) Calculer $\tan(\alpha)$ et $\tan(\beta)$
   (b) Calculer $\tan 2x$ en fonction de $\tan x$.
   En déduire la valeur de $\tan(2\alpha)$ puis $\tan(4\alpha)$.
   (c) Calculer $\tan(x+y)$ en fonction de $\tan x$ et de $\tan y$.

   En déduire la valeur de $\tan(4\alpha - \beta)$
2. Conclusion.
   Démontrer que $0 < \beta < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. En déduire

$$\left.\begin{array}{c} \ldots \leqslant 4\alpha - \beta \leqslant \ldots \\ ET \\ \tan(4\alpha-\beta) = \ldots \end{array}\right\} \Rightarrow 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = 4\alpha - \beta = \ldots..$$

4 Annexe : Congruence.

Définition 15.
Soit $a, b \in \mathbb{R}$.

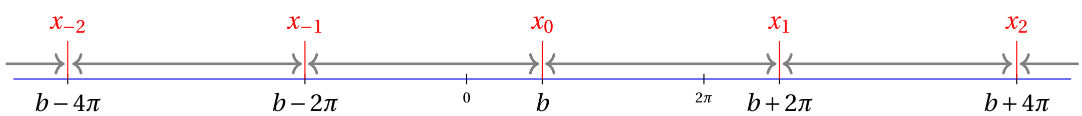
On dit que a est congru à b modulo 2π, noté $a \equiv b \, mod \, [2\pi]$ Ssi

$$a \equiv b \, mod \, [2\pi] \iff \text{Il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } a = b + k(2\pi)$$

Interprétation géométrique. Cela

$$x \equiv b \, mod \, [2\pi] \text{ Ssi Il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que} x = x_k = b + k(2\pi).$$

Les nombres $x_0, x_1, x_2, \ldots$ sont distants de 2π, CàD



Théorème 16. Propriétés de bon sens.
Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$

> Symétrie

$$a \equiv b \, mod \, [2\pi] \iff b \equiv a \, mod \, [2\pi]$$

> Transitivité.

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv b \, mod \, [2\pi] \\ \\ b \equiv c \, mod \, [2\pi] \end{array}\right\} \implies a \equiv c \, mod \, [2\pi]$$

Démonstration : Je vais démontrer la transitivité.

On suppose que $a \equiv b \, mod \, [2\pi]$ et $b \equiv c \, mod \, [2\pi]$

Ainsi Il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tq $a = b + k(2\pi)$ et $b = c + k'(2\pi)$

On veut montrer que $a \equiv c \, mod \, [2\pi]$

CàD on veut trouver $p \in \mathbb{Z}$ tel que $a = c + p(2\pi)$

On a (c'est l'entretient d'embauche)

$$a = b + k(2\pi) = [c + k'(2\pi)] + k(2\pi) = c + (k + k')(2\pi)$$

Je choisis $p = k + k'$.

Avec ce choix p est un entier donc p convient.

Fini □

Théorème 17. Formulaire.
Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$

> Addition

$$a + b \equiv c \, mod \, [2\pi] \iff a \equiv (b - c) \, mod \, [2\pi]$$

> Produit. On suppose que $b \neq 0$

$$ab \equiv c \, mod \, [2\pi] \iff a \equiv {}^{c}/_{b} \; mod \, [{}^{2\pi}/_{b}]$$

$${}^{a}/_{b} \equiv c \, mod \, [2\pi] \iff a \equiv cb \, mod \, [b2\pi]$$

Application : Résoudre l'équation $(2x+3) \equiv (5x+7) \, mod \, [2\pi]$

$$(2x+3) \equiv (5x+7) \, mod \, [2\pi] \iff (2x - 5x) \equiv (7-3) \, mod \, [2\pi]$$

$$\iff x \equiv \frac{4}{-3} \, mod \, [{}^{2\pi}/_{-3}]$$

Conclusion : Les solutions de l'équation sont $x = x_k = -\frac{4}{3} - k\frac{2\pi}{3}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Correction.

Solution de l'exercice 9 (Énoncé) On va faire les dominos

$$\sin\left(\frac{1}{2}\right) S_n = \sin\left(\frac{1}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(k) = \sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{1}{2}\right)\cos(k)$$

On modifie le plateau : $\sin\left(\frac{1}{2}\right)\cos(k) = SC$

$$\begin{aligned} &= \tfrac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\sin\left(\tfrac{1}{2}+k\right)+\sin\left(\tfrac{1}{2}-k\right)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\sin\left(k+\tfrac{1}{2}\right)-\sin\left(k-\tfrac{1}{2}\right)\right) \qquad \text{car Sinus est impaire} \end{aligned}$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{1}{2}\right) S_n &= \frac{1}{2}\left(\sin\left(1+\frac{1}{2}\right)-\sin\left(1-\frac{1}{2}\right)\right) + \tfrac{1}{2}\left(\sin\left(2+\tfrac{1}{2}\right)-\sin\left(2-\tfrac{1}{2}\right)\right) \\ &\quad + \dots + \tfrac{1}{2}\left(\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)-\sin\left(n-\tfrac{1}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{3}{2}\right)-\sin\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \tfrac{1}{2}\left(\sin\left(\tfrac{5}{2}\right)-\sin\left(\tfrac{3}{2}\right)\right) \\ &\quad + \dots + \tfrac{1}{2}\left(\sin\left(\tfrac{2n+1}{2}\right)-\sin\left(\tfrac{2n-1}{2}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)-\sin\frac{1}{2}\right] \end{aligned}$$

Conclusion : Si $\sin\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$, on a $S_n = \dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \dfrac{1}{2}$

Solution de l'exercice 10 (Énoncé)

1. On a facilement
$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}=2\cos\alpha.$$
C'est les dominos multiplicatifs
$$P_n=\prod_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)=\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)}{2.\sin\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)}\right)$$
$$=\text{..Dominos..}=\frac{1}{2^{n+1}}\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}==\frac{1}{2^{n+1}}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}$$

2. On a $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n=\dfrac{1}{\infty\sin(0)}$, c'est une FI avec $\sin(0)$ donc va utiliser l'approximation linéaire.
$$\lim_{n\to+\infty}P_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n+1}[\square+o(\square)]}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{\pi}{2}+o\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{\pi/2}=\frac{2}{\pi}$$

Solution de l'exercice 11 (Énoncé)

1.
   (a) Soit $x\in\mathbb{R}$.tel que $\tan x=\sqrt{2}+1$
   $$\tan 2x=\text{On fait apparaitre }\tan\text{ à l'aide des formules trigo}$$
   $$=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)}{1-\left(\sqrt{2}+1\right)^2}=....=-1$$
   (b) Comme $\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$, on a
   $$\begin{cases}\tan 2x=-1=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\\ x\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow 2x\equiv-\frac{\pi}{4}\,[\pi]\Leftrightarrow x\equiv-\frac{\pi}{12}\left[\frac{\pi}{2}\right]$$

2. Recherche des solutions de (E).
Comme $\tan x=\sqrt{2}+1\Rightarrow\tan(2x)=-1$, les solutions de (E) sont **parmi** les solution ci-dessus.
Il faut, on va d'abord résoudre théoriquement (pour savoir ce que l'on cherche) puis identifier.
   (a) **Résolution théorique.**
   On sait que la fonction Tangente est strictement croissante, continue sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ donc Tangente est bijective de $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$
   Ainsi il existe un unique $\theta_0\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan\theta_0=\sqrt{2}+1$
   $$(E)\Leftrightarrow\begin{cases}\tan x=\sqrt{2}+1=\tan\theta_0\\ x\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow x\equiv\theta_0\,[\pi]$$
   De plus $\sqrt{2}+1>0\Rightarrow\theta_0\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$
   (b) **Identification**
   Comme $x\equiv-\dfrac{\pi}{12}\left[\dfrac{\pi}{2}\right]\Leftrightarrow\left(x\equiv-\dfrac{\pi}{12}\,[\pi]\text{ ou }x\equiv\left(-\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{2}\right)[\pi]\right)$, on a grâce au signe $\theta_0=-\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{2}$.
   $$\text{Conclusion : }(E)\begin{cases}\tan x=\sqrt{2}+1\\ x\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow x\equiv\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}\right)[\pi]$$

Solution de l'exercice 14 (Énoncé) 1. On va montrer, de deux manières différentes, que :

$$\forall\, p\in\mathbb{N},\quad \arctan(p+1)-\arctan(p)=\arctan\left(\frac{1}{1+p+p^2}\right)$$

(a) Méthode 1. On étudie la fonction h définie par l'expression

$$h: x\longmapsto f(x)=\arctan(x+1)-\arctan(x)-\arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$$

La fonction est dérivable sur $\mathscr{D}'=\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\forall\, x\in\mathbb{R},\ h'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\arctan(x+1)-\arctan(x)-\arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)\right]\\
&= [1+x]'\,\frac{1}{1+(1+x)^2}-\frac{1}{1+(x)^2}-\left[\frac{1}{1+x+x^2}\right]'\frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)^2}\\
&= \frac{1}{1+(1+x)^2}-\frac{1}{1+x^2}-(1+2x)\frac{-1}{(1+x+x^2)^2}\,\frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)^2}\\
&= \frac{1}{2+2x+x^2}-\frac{1}{1+x^2}+\frac{1+2x}{1+(1+x+x^2)^2}\\
&= \frac{-1-2x}{(2+2x+x^2)(1+x^2)}+\frac{1+2x}{1+(1+x+x^2)^2}\\
&\qquad \textit{Or on remarque que : } (2+2x+x^2)(1+x^2)=\cdots\\
&\qquad\quad \textit{et } 1+(1+x+x^2)^2=\cdots\\
&\qquad \textit{Donc c'est égal } !!!!!\\
&= 0
\end{aligned}$$

D'où le tableau

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ ∞
$g'(x)$	0
$g(x)$	$\longrightarrow$

La fonction est constante sur $\mathbb{R}$ et $h(0)=\cdots=0$ donc la fonction h est nulle sur $\mathbb{R}$.

(b) Méthode 2. Je note : $A=\arctan\left(\frac{1}{1+p+p^2}\right)$ et $B=\arctan(p+1)-\arctan(p)$.

Rappel : On sait $\arctan(a)$ est une solution de l'équation $\tan(x)=a$

Ainsi ainsi : $\forall\, a\in\mathbb{R},\ \tan(\arctan(a))=a$.

> On a $\tan(A)=\dfrac{1}{1+p+p^2}$.

> De même, on a $\tan(B)=\tan(x-y)=\dfrac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}=\dfrac{1/(p+1)-1/p}{1-\frac{1}{(p+1)p}}=\dfrac{1}{1+p+p^2}$

Donc A et B sont solutions de l'équation $\tan(X)=\dfrac{1}{1+p+p^2}$

> De plus la fonction Arc-tangente est croissante et impaire, on a donc $0\leqslant\arctan(p)\leqslant\arctan(p+1)<\dfrac{\pi}{2}$

Ainsi $0<A<\dfrac{\pi}{2}$ et $0<B<\dfrac{\pi}{2}$

> Enfin on sait que les solution de l'équation $\tan(X)=m$ sont de la forme $X\equiv X_0 \mod [\pi]$.

Donc sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, l'équation $\tan(X)=\dfrac{1}{1+p+p^2}$ admet une unique solution.

Conclusion : $A=B$

Solution de l'exercice 15 (Énoncé)

> On trouve $\tan(A) = ... = 0$.
Donc A est une solution de l'équation $\tan(X) = 0$

> On sait que $\tan(X) = 0 \iff x \equiv 0 \; mod\,[\pi]$

> De plus, comme Arc-tangente est croissante, on a $\dfrac{\pi}{4} = \arctan(1) \leqslant \arctan(2) \leqslant \arctan(3) < \dfrac{\pi}{2}$

$$\text{Ainsi } \frac{3\pi}{4} \leqslant A = \arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3) \leqslant \frac{3\pi}{2}$$

La seule solution de l'équation $\tan(X) = 0$ dans $\left]\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$ c'est π

$$\text{donc forcément } A = \arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3) = \pi$$