Les suites (petite introduction).

1 Vocabulaire, Quantificateur 1
2 À la mode géométrique. 2
3 Les suites Arithmético-Géométriques. 3
4 Suites d'ordre 2. 4

1 Vocabulaire, Quantificateur

Définition 1.
Une suite numérique (réelle ou complexe), notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
est une liste d'éléments de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ indexées sur $\mathbb{N}$, CàD

Attention Il ne faut pas confondre : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et le nombre u_n.

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\underbrace{u_0}_{n=0}, \underbrace{u_1}_{n=1}, u_2, \ldots, \underbrace{u_{641}}_{n=641}, \ldots, \underbrace{u_{2021}}_{n=1492}, \ldots, \underbrace{u_{10^{24}}}_{n=10^{24}}, \ldots\right)$$

Exemples

> La suite constante égale à a, CàD $(a)_{n\in\mathbb{N}} = (a, a, \ldots, a, ..)$, CàD $\forall\ n,\ u_n = a$
> la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, a, a^2, a^3 \ldots, a^n, ..)$ est une suite géométrique de raison a, on a $\forall\ n,\ u_n = a^n$
> la suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} = (+1, -1, +1, -1, \ldots, ..)$, , on a $\forall\ n,\ u_n = (-1)^n$

Définition 2. Vocabulaire générale

> La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
Ssi $\forall\ n \in \mathbb{N},\ ,\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$

> La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée
Ssi Il existe M tel que $\forall\ n \in \mathbb{N},\ ,\ u_n \leqslant M$

> La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée
Ssi Il existe K tel que $\forall\ n \in \mathbb{N},\ ,\ |u_n| \leqslant K$

Définition 3. Suite récurrentes

> On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente d'ordre 1 Ssi
Ssi le nombre u_{n+1} s'exprime (entre autre) en fonction du précédent, CàD de u_n.
Faire des récurrence d'ordre 1 n'est jamais une mauvaise idée.

> On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente d'ordre 2 Ssi
Ssi le nombre u_{n+2} s'exprime (entre autre) en fonction des 2 précédents, CàD de u_{n+1} et u_n.
Faire des récurrence d'ordre 2 ***avec double initialisation*** *n'est jamais une mauvaise idée.*

2 À la mode géométrique.

Définition 4. À la mode géométrique

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de type/modèle géométrique

Ssi on a une relation de la forme $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant \underbrace{(Facteur)}\, u_n$

Remarque : il est possible que le facteur dépendent de n, CàD $Facteur = F_n$.

À la mode géométrique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite type/modèle géométrique, alors on a le calcul suivant

$$\begin{aligned}\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n &\leqslant F_{n-1}\, \underbrace{u_{n-1}} \\ &\leqslant F_{n-1}\,(F_{n-2}\, \underbrace{u_{n-2}}) \\ &\leqslant F_{n-1}.F_{n-2}.(F_{n-3}\, u_{n-3}) \\ &\ \vdots \\ &\leqslant F_{n-1}F_{n-2}...(F_0\, u_0)\end{aligned}$$

Théorème 5. Cv, div, chaos pour des suites géométriques.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q.

À l'aide du calcul "à la mode géo", on a $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = q^n\, u_0$

Alors on a

> Lorsque $q = 1$
alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à u_0 et donc elle converge vers u_0.

> Lorsque $|q| < 1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
complément lorsque $0 < q < 1$ la suite est monotone et lorsque $-1 < q < 0$ la suite oscille.

> Lorsque $q > 1$ alors lors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $\pm\infty$ selon le signe de u_0.

> Lorsque $q \leqslant -1$ alors lors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ chaotique CàD ne converge pas et ne diverge pas vers $\pm\infty$.

Démonstration :

– Lorsque $q > 0$, on utilise $u_n = q^n\, u_0 = u_0\, a^{bouge} = u_0\, e^{n\ln(q)}$. Il y a 3 situations :

$$\begin{aligned}&\textit{Situation 1 : } \ln(q) > 0 \iff q > 1 \\ &\qquad \textit{on a alors } n\ln(q) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \textit{ et } \lim_{n\to\infty} u_n = \infty \\ &\textit{Situation 2 : } \ln(q) = 0 \iff q = 1 \\ &\qquad \textit{la suite est constante égale à } u_0 \\ &\textit{Situation 3 : } \ln(q) < 0 \iff q \in]0,1[\\ &\qquad \textit{on a alors } n\ln(q) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty \textit{ et } \lim_{n\to\infty} u_n = 0\end{aligned}$$

– Lorsque $q \in]-1,0[$, on va mesurer la distance entre u_n et 0

$$|u_n - 0| = |u_n| = |q^n\, u_0| \leqslant |q|^n |u_0| = |u_0| \exp(n\ln|q|) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \textit{ car } \ln|q| < 0$$

Donc la distance entre u_n et 0 tend vers 0

Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

3 Les suites Arithmético-Géométriques.

Définition 6. Les suites Arithmético-Géométriques

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

> On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique

Ssi Il existe deux constantes a, b tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b.$$

`Remarque : Une suite arithmético-géométrique est donc une suite récurrente d'ordre 1.`

> La suite Homogène associée est la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ H_{n+1} = aH_n + \underbrace{0}$$

Théorème 7.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique vérifiant

$$\forall\, n,\ u_{n+1} = au_n + b$$

Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la somme de

> D'une suite particulière (K_n) *constante* et vérifiant la même récurrence

> De la suite Homogène associée $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = K_n + H_n$

Démonstration :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique vérifiant $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a\,u_n + b$

et (K_n) une suite particulière *constante* et vérifiant la même récurrence

On a

$$\begin{array}{rl} u_{n+1} & = a\,u_n + b \\ K_{n+1} & = a\,K_n + b \\ \hline u_{n+1} - K_{n+1} & = a\,u_n - a\,K_n \end{array}$$

$$\Longrightarrow\ (u_{n+1} - K_{n+1}) = a\,(u_n - K_n)$$

Ainsi la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $H_n = u_n - K_n$

est une suite vérifiant la relation Homogène associée celle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, CàD une jolie suite géo.

Conclusion : on a bien $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = K_n + H_n = K_n + H_0\,a^n$

Bonus : Comme (K_n) est une suite suite particulière *constante* et vérifiant la même récurrence ,

on a : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ K_n = K$ et $K_{n+1} = a\,K_n + b$,

ainsi $K = a\,K + b \Longrightarrow K = \dfrac{b}{1-a}$ (lorsque $a \neq 1$).

Conclusion : lorsque $a \neq 1$, on a : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = K_n + H_n = \dfrac{b}{1-a} + H_0\,a^n$

4 Suites d'ordre 2.

Définition 8. Suite récurrente linaire d'ordre 2.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

> On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants Ssi il existe a, b, c tel que

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad a\,u_{n+2}+b\,u_{n+1}+c\,u_n=0\quad \textit{avec } a\neq 0$$

> On appelle alors équation caractéristique associée à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\textit{L'équation caractéristique}\quad aX^2+bX+c=0$$

Théorème 9. Calcul du nombre u_n en fonction de n.
Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ avec $a\neq 0$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $\forall\, n\in\mathbb{N},\ a\,u_{n+2}+b\,u_{n+1}+c\,u_n=0$.
Soit $aX^2+bX+c=0$ son équation caractéristique et $\Delta=b^2-4ac$, son discriminant.

$\boxed{\text{Lorsque } \Delta=b^2-4ac>0}$

Alors l'équation caractéristique a 2 sol/racines distinctes r et r' dans $\mathbb{R}$

$$\text{et on a : } \forall\, n\in\mathbb{N},\ u_n=\lambda\,(r)^n+\mu\,(r')^n\quad \textit{avec } \lambda,\mu \textit{ des constantes.}$$

$\boxed{\text{Lorsque } \Delta=b^2-4ac=0}$

Alors l'équation caractéristique a a 1 seule sol/racine $r=r'$

$$\text{et on a : } \forall\, n\in\mathbb{N},\ u_n=\lambda\,(r)^n+\mu\,(n\,r^n)=(\lambda+\mu\,n)\,r^n\quad \textit{avec } \lambda,\mu \textit{ des constantes.}$$

$\boxed{\text{Lorsque } \Delta=b^2-4ac<0}$

Alors l'équation caractéristique a 2 sol/racines distinctes r et r' dans $\mathbb{C}$
De plus $r=a+ib=\rho\,e^{i\theta}$ et $r'=\overline{r}=a-ib=\rho\,e^{-i\theta}$

$$\text{et on a : } \forall\, n\in\mathbb{N},\ u_n=\lambda\left[\rho^n\cos(n\theta)\right]+\mu\left[\rho^n\sin(n\theta)\right]\quad \textit{avec } \lambda,\mu \textit{ des constantes.}$$

Démonstration : *Les 3 situations se font exactement pareilles.*
Pour la démonstration, je suppose que $\Delta=b^2-4ac>0$.

La démonstration se fait en 2 étapes.

> Étape 1 : On choisit finement λ et μ.
On veut que $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_n=\lambda r^n+\mu(r')^n$ donc cela doit être vrai pour $n=0$ et $n=1$.
Je choisis λ et μ pour que

$$\begin{cases}\lambda r^0+\mu(r')^0=u_0\\ \lambda r^1+\mu(r')^1=u_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda+\mu=u_0\\ \lambda r+\mu r'=u_1\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda+\mu=u_0\\ 0+\mu(r'-r)=u_1-r\,u_0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda+\mu=u_0-\mu=u_0-\dfrac{u_1-r\,u_0}{r'-r}\\ \mu=\dfrac{u_1-r\,u_0}{r'-r}\end{cases}$$

> Étape 2 : On démontre maintenant par une récurrence à 2 étages

$$H_{<n>}\ :\ u_n=\lambda r^n+\mu(r')^n.$$

Initialisation : $H_{<0>}$ et $H_{<1>}$ sont vraies à cause de l'étape 1.
Hérédité

J'y vais rapide, je n'écris pas le "on suppose ... ", ni le "on veut montrer ...."

On a

$$
\begin{aligned}
u_{n+2} &= \frac{1}{a}\left[-b\,u_{n+1} - c\,u_n\right] \\
&= \frac{1}{a}\left[-b(\lambda r^{n+1} + \mu(r')^{n+1}) + -c(\lambda r^n + \mu(r')^n)\right] \\
&= \lambda\, r^n \left(\frac{-br-c}{a}\right) + \mu\,(r')^n \left(\frac{-br'-c}{a}\right)
\end{aligned}
$$

Comme r et r' sont des solutions de l'équation caractéristique

$$On\ a\ a\,r^2 + br + c = 0 \implies r^2 = \frac{-br-c}{a}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda\, r^n (r^2) + \mu\,(r')^n (r')^2 \\
&= \lambda\, r^{n+2} + \mu\,(r')^{n+2} \quad fini.
\end{aligned}
$$