(In)-Équations

1 Inéquation.

Théorème 1.
> Pour résoudre l'inéquation $A \leqslant B$

On fait : $G - p = B - A$ puis FFB et on conclut avec un tableau de signe.

> Pour trouver le signe de f',

On fait : $\forall\, t \in \mathscr{D},\ f'(t) =$ puis FFB et on conclut avec un tableau de signe.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Étudier les variation de $f : x \longmapsto (1+x)^n + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n$

Exercice 2.

Étudier les variation de $f : x \longmapsto x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x)$

2 Équation.

2.1 Vocabulaire, méthode et Kulture

Définition 2. Résoudre Vs Trouver/Déterminer/Il existe

> Résoudre une équation (sur $\mathscr{D}$) signifie :

Trouver <u>toutes</u> les solutions de l'équation dans le domaine D.

> Trouver/déterminer/Montrer qu'il existe a, b tel que .... signifie :

Trouver un coule a, b qui convient

sans chercher à vérifier/justifier que ce couple est le seul, unique.

$\boxed{\text{Les classiques.}}$

> Naturel

- $A.B = 0 \iff [A = 0 \ ou\ B = 0]$ Remarque ceci est faux avec des matrices
- $A^2 = 0 \iff A = 0$. Remarque ceci est faux avec des matrices

> Opérations :

- Addition : $A + B = C \iff A = C - B$
- Produit/Quotient : ${}^{A}/_{B} = C \iff [A = BC \ et\ B \neq 0]$ souvent on oublie $B \neq 0$.
- Racine : $A = \sqrt{B} \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} A^2 = B$

$\boxed{\text{Les équations classiques.}}$ Soit a un paramètre dans $\mathbb{R}$.

$$> x^2 = a \iff \begin{cases} \text{Lorsque } a > 0, & x = +\sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a} \\ \text{Lorsque } a = 0, & x = 0 \\ \text{Lorsque } a < 0, & x = +i\sqrt{|a|} \text{ ou } x = -i\sqrt{|a|} \end{cases}$$

> $ax^2 + bx + c = 0$ il y a une discussion selon la valeur de $\Delta = b^2 - 4ac$.

> ln/exp : $\ln(x) = a \iff x = e^a$ et $e^x = a \iff \begin{cases} \text{Si } a > 0, & x = \ln(a) \\ \text{Si } a \leqslant 0, & \text{Pas de solution} \end{cases}$

> Trigo : $\tan(x) = a$, $\sin(x) = a$, $\cos(x) = a$

2.2 Résoudre par (analyse)/équivalence.

Théorème 3. Résoudre

> Pour résoudre une équation, il y a deux "stratégies"

- Soit on utilise un théorème qui résout,
  par exemple : Le théorème de la bijection monotone, le théorème de d'Alembert-Gauss, les théorèmes sur les équa diff, ...

- Soit on fait un raisonnement par analyse/équivalence ou analyse/synthèse.

  Pour montrer qu'un problème admet une solution (unique), on peut procéder en deux temps :

  > l'analyse : on montre qu'une hypothétique solution doit nécessairement avoir une certaine forme (ce qui réduit les solutions possibles).

  > puis la synthèse : on regarde, parmi les solutions possibles de l'analyse, lesquelles sont bien des solutions.

  Démarche.

  On commence à partir de l'équation
  Puis on enchaine avec des $\boxed{\iff}$
  Et, à la fin, on aboutit à une équation que l'on sait résoudre.

  `Attention : Lorsqu'on utilise` $\Longrightarrow$
  `alors à la fin, il faut tester les solutions (Voir les exemples).`

• Exemple 1 : Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\dfrac{2x+3}{5x+7} = 11$.

> *Analyse* : on a $\dfrac{2x+3}{5x+7} = 11 \iff 2x+3 = 11(5x+7) \iff x[2-55] = 77-3 \iff x = \dfrac{74}{-53}$

Conclusion l'équation admet l'unique solution $x = {}^{-74}/_{53}$

• Exemple 2 : Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\sqrt{x+2} = x$.

> *Analyse* : on a $\sqrt{x+2} = x \implies x+2 = x^2 \implies x^2 - x - 2 = 0$

Comme $\Delta = 1+8 = 9 = 3^2$, il y a 2 sol $\neq$ dans $\mathbb{R}$, $r = \dfrac{1-3}{2} = -1$ et $r' = \dfrac{1+3}{2} = 2$.

> *synthèse (à cause du $\Longrightarrow$)* : Comme $\sqrt{r+2} = \sqrt{(-1)+2} = 1 \neq -1 = r$ et $\sqrt{r'+2} = \sqrt{2+2} = 2 = r'$,

Conclusion l'équation admet l'unique solution $x = 2$

Exercice 3. [Correction] Soit a et b non nuls et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes (d'inconnue x et R) :

$$\frac{3x+1}{2x-3} = 3 \qquad \frac{2+{}^{1}/_{x}}{3+{}^{2}/_{x}} = 3 \qquad \frac{3x}{10} = \frac{5}{6x}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{R} \qquad x^{n+1} = 2x^n \qquad \ln(x^2) - \ln(x) - 6 = 0$$

2. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les Inéquation suivantes (d'inconnue x et R) :

$$\frac{3x+1}{2x-3} \geqslant 3 \qquad \frac{2+{}^{1}/_{x}}{3+{}^{2}/_{x}} \geqslant 3 \qquad \frac{3x}{10} \geqslant \frac{5}{6x}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geqslant \frac{1}{R} \qquad x^{n+1} \geqslant 2x^n \qquad \ln(x^2) - \ln(x) - 6 \geqslant 0$$

Exercice 4. [Correction] Soit a et b non nuls et $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ (d'inconnue x et R) :

$$x^4 - x^2 - 2 = 0 \qquad x^9 + 2x^5 - x = 0 \qquad e^x - 1 - 2e^{-x} = 0 \qquad \sqrt{2-\ell} = \ell$$

2.3 Bijection monotone.

Théorème 4. Résolution via une fonction

Pour résoudre l'équation $f(\ell) = \ell$

> On étudie la fonction $h : x \longmapsto h(x) - x$.

> Avec le tableau de variation et théorème de la bijection monotone,
on conclut sur le nombre de solution.

Exemple. *Montrer que :* $\sin(\ell) = \ell \iff \ell = 0$.

Il n'est pas possible de résoudre l'équation par équivalence
Donc on va le faire "graphiquement" mais ça va être long.

> On étudie la fonction $h : x \longmapsto \sin(x) - x$

L'étude (pas dur mais longuette) permet de conclure que : la fonction h est strictement décroissante.

> La fonction est continue et strictement décroissante

Ainsi h réalise une bijection (décroissante) de $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ sur $\mathrm{Im} = \mathbb{R}$ (théorème de la bijection monotone.)

Comme $0 \in \mathrm{Im}$, on sait que l'équation $h(x) = 0$ a une unique solution que je note ℓ.

> De plus, il est évident que $h(0) = 0$. Comme ℓ est l'unique solution, on a forcément $\ell = 0$.

Conclusion : $X = 0$ est l'unique solution de l'équation $\sin(X) = X$.

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes en discutant, si besoin, suivant le paramètre

$$\ln(1+\ell) = \frac{1}{2}\ell \qquad e^x = x \qquad x\ln(x) = m$$

2.4 Les équations trigo.

2.5 Trouver ......

3 Système d'équations.

Exemples de système de n équations à n inconnues. ici $n=3$

$$\underbrace{\begin{cases} 2a-3b+4c=2 \\ a+8b+5c=8 \\ -a+2b+c=-5 \end{cases}}_{\text{Système complet}} \text{ et le système homogène associé } \begin{cases} 2a-3b+4c=0 \\ a+8b+5c=0 \\ -a+2b+c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y=3 \\ y-3z=4 \\ -x+4z=-1 \end{cases} \text{ et le système homogène associé } \begin{cases} x-2y=0 \\ y-3z=0 \\ -x+4z=0 \end{cases}$$

Exemples de système de n équations à p inconnues avec $n \neq p$

$$\begin{cases} 4x-y=3 \\ -x+5y=-1 \\ x+y=3 \end{cases} \text{ et le système homogène associé } \begin{cases} 4x-y=0 \\ -x+5y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+3y=0 \\ x-z+t=-9 \end{cases} \text{ et le système homogène associé } \begin{cases} 2x+3y=0 \\ x-z+t=0 \end{cases}$$

Un système avec une seule équation est un système

$$\{2x-3y=5 \qquad \{2x-3y+5z=7$$

Définition 5.

> On notera le vocabulaire : "Système complet" et "système homogène associé"

> On dit qu'un système est triangulaire

`Ssi chaque équation est strictement plus "courte" que la précédente.`

Par exemple les systèmes suivants sont triangulaires

$$(S_1)\begin{cases} 2x+3y-z=3 \\ y+2z=2 \end{cases} \quad ou \quad (S_2)\begin{cases} x-y-z+t=1 \\ y+z+2t=0 \\ 2t=2 \end{cases}$$

Théorème 6. Résolution pratique des systèmes.

> Étape 1 : Avec des opérations de Gauss, on trigonalise le système.

> Étape 2 : On discute (si besoin)

> On finalise en donnant le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ des inconnues.

Exercice 6. [Correction] Résoudre les systèmes suivants en discutant, si besoin, suivant le paramètre

$$\begin{cases} 2x+y=2 \\ 3x-5y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+4y=3 \\ 4x+8y=m \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+y=4 \\ 3x-y=1 \\ -5x+3y=m \end{cases}$$

Exercice 7. Résoudre les systèmes suivants

$$\begin{cases} x +z=2 \\ y-z=-1 \\ x+2y =3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y+z=1 \\ x+y-z=2 \\ x -3z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y+z+t=1 \\ x +z+t=3 \\ y +t=-1 \\ x+y+z+2t=2 \end{cases}$$

Exercice 8. [Correction]

1. Résoudre le système $\{x+y=2$ d'inconnue x,y et interpréter géométriquement
2. Résoudre les systèmes d'inconnue x,y,z et interpréter géométriquement

$$\{2x+3y-5z=2 \qquad \begin{cases} 2x+3y-5z=2 \\ x+4y-z=3 \end{cases} \qquad \{x+y=2$$

Exercice 9. [Correction] En calculant ses coefficients, déterminer des polynômes P de degré $\leqslant 2$ vérifiant

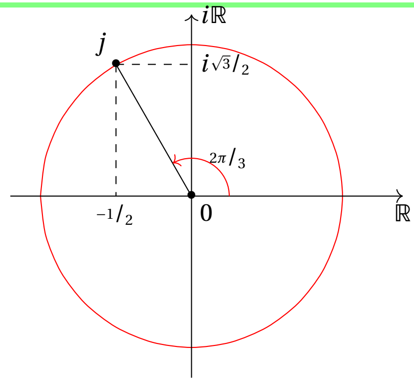
$$P(1)=2,\ P(2)=1,\ P(3)=2$$

4 Les racines n-ième de l'unité.

4.1 Le nombre complexe j.

Définition 7.
Le complexe j est le complexe définie par

$$j = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\,2\pi/3}$$

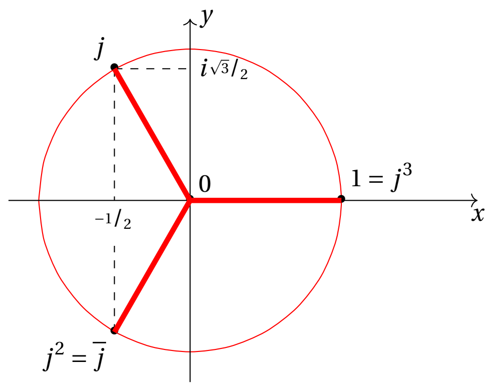


Théorème 8. Propriétés du complexe j.

> Le complexe j est une solution de l'équation $X^3 = 1$
  Ainsi j est une racine cubique de l'unité

> L'équation $X^3 = 1$ admet, dans $\mathbb{C}$, exactement 3 solutions sont : $1, j, j^2$.
  Ce sont les 3 racines cubiques de l'unité.

> Les 3 racines cubiques de l'unité s'exprime en fonction de j,
  On dit que j est la racine 3-ième fondamentale de l'unité.



Et on a le formulaire

$$j^3 = 1 \quad et \quad j^4 = j \quad et \quad j^5 = j^2 \quad etc\ldots$$
$$|j| = 1 \quad et \quad j^2 = \overline{j}$$
$$1 + j + j^2 = 0$$

Exercice 10. Calcul avec le complexe j.

1. Calculer

$$(1+j)^7;\ (1+j)(1+j^2);\ \frac{j^9}{j+j^2};\ (1-j+j^2)^4$$

2. On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & -1-j & 1 \\ j^2 & 1 & -1-j^2 \end{pmatrix}$.

   Calculer A^3.

4.2 Racines n-ième de 1.

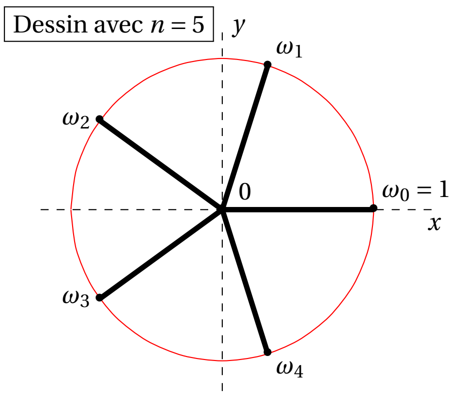
Théorème 9. Les racines n-ième de l'unité.

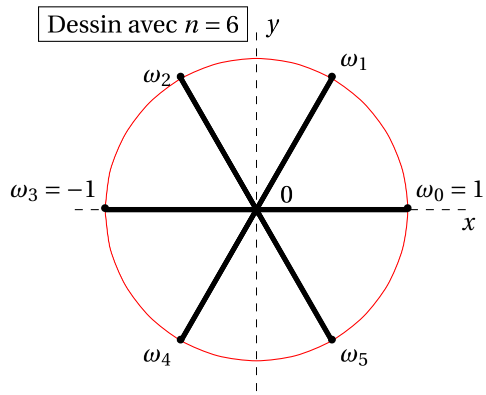
On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.
On considère l'équation

Alors l'équation $X^n = 1$ a n racines distinctes dans $\mathbb{C}$, notées $\omega_0,\ \omega_1, ..., \omega_{n-1}$, et on a

$$\forall \ \in \{0, 1, ..., (n-1)\}, \quad \omega_k = \exp\left(ik\frac{2\pi}{n}\right)$$

Géométriquement : Les racines $\omega_0,\ \omega_1, ..., \omega_{n-1}$ découpent le cercle unité (ou gâteau) en exactement n parts égales, CàD on a le dessin





Vocabulaire-Notation :

- Les complexes $\omega_0,\ \omega_1, ..., \omega_{n-1}$ sont appelés les racines n-ième de l'unité.
- ω_1 est appelé la racine n-ième fondamentale.
- L'ensemble des racines n-ième est noté $\mathbb{U}_n$.

Démonstration : On va faire une démonstration qui utilise le théorème de d'Alembert-Gauss.

On a

> Les complexes ω_k vérifient l'équation $X^n = 1$. En effet

$$(\omega_k)^n = \left(e^{ik2\pi/n}\right)^n = e^{(ik2\pi/n)n} = e^{ik2\pi} = e^{i\ Multiple\ de\ 2\pi} = 1$$

> Les complexes ω_k sont 2 à 2 $\neq$ pour $k \in \{0, 1, ...(n-1)\}$. (Il suffit de regarder le dessin.)

> L'équation $X^n = 1$ est de degré n

Donc à cause du théorème du d'Alembert Gauss, on sait qu'on a toutes les racines. Fini.

Théorème 10. Propriétés des racines n-ième.
Soit $n \in \mathbb{N}*$ et $k \in \{0, 1, ..., (n-1)\}$.
On considère ω_0, $\omega_1, ..., \omega_{n-1}$ les racines n-ième de l'unité.
On a alors

> Les racines n-ième de l'unité découpe le cercle unité (ou gâteau) en n parts égales.

> $\omega_0 = 1$ et $(\omega_k)^n = 1$ car c'est une racine n-ième.

> $\omega_k = e^{i\square}$ donc ω_k appartient au cercle unité, CàD $|\omega_k| = 1$.

> La somme des racine n-ième est nulle, CàD
$$\omega_0 + \omega_1 + ... + \omega_{n-1} = 0$$

> ω_k se calcule en fonction de ω_1. En effet $\omega_k = e^{ik2\pi/n} = \left(e^{i2\pi/n}\right)^k = (\omega_1)^k$

On dit que ω_1 est la racine n-ième fondamentale.

> Le conjugué de ω_k c'est ω_{n-k}, CàD $\overline{(\omega_k)} = \omega_{n-k}$

Démonstration : Les propriétés 1-2-3 sont évidentes. La propriété 4 est démontrée dans le théorème.

$\boxed{\text{Somme?}}$ On a

$$\omega_0 + \omega_1 + ... + \omega_{n-1} = 1 + \omega_1 + (\omega_1)^2 + ... + (\omega_1)^{n-1}$$
$$= \frac{1-(\omega_1)^n}{1-(\omega_1)} = \frac{1-\boxed{1}}{1-(\omega_1)} = 0$$

$\boxed{\text{Conjugué?}}$ C'est évident sur le dessin et on a le calcul

$$\omega_{n-k} = e^{i(n-k)2\pi/n} = ... = \overline{(\omega_k)}$$

Exercice 11. On soit $n \in \mathbb{N}^*$ et ω une racine n-ième de l'unité

Montrer que ω^2 et $\overline{\omega}$ sont aussi des racines n-ième des l'unité.

Exercice 12. [Correction] Soit a, b, c des complexes. Montrer que :
$$c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a) \iff a + bj + cj^2 = 0$$

Exercice 13. Soit le complexe $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}} = \exp\left[i\frac{2\pi}{5}\right]$
On pose $A = \omega + \omega^4$ et $B = \omega^2 + \omega^3$.

1. Placer $\omega, \omega^2, \omega^3$ et ω^4 sur le cercle trigo.
2. D'une part. Montrer que $A = 2\cos\frac{2\pi}{5}$ et $B = 2\cos\frac{4\pi}{5}$.
3. D'autre part.
   Calculer $A + B$ et $A.B$.
   En déduire la valeur de A et de B.
4. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right), \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right), \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Exercice 14. Soit le complexe $\omega = e^{i\frac{2\pi}{7}} = \exp\left[i\frac{2\pi}{7}\right]$
On pose $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.

1. Calculer $A + B$ et vérifier que $AB = 2$.
2. En déduire A et B

Théorème 11. Racines n-ième de a.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$.
Les solution de l'équation $X^n = a = re^{i\theta}$ sont le produit

> D'une solution particulière $r_0 = \sqrt[n]{a} = a^{1/n} = \left(re^{i\theta}\right)^{1/n} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\theta/n}$.

> Et des racines n-ième de l'unité, CàD $\omega_0 = 1$, $\omega_1, ..., \omega_{n-1}$,

Conclusion : on a : $X^n = a \iff X = r_k = r_0.\omega_k \quad avec\ k \in \{0, 1, ..(n-1)\}$

Démonstration : On vérifie facilement que $(r_0)^n = \left(\sqrt[n]{r}.e^{i\theta/n}\right)^n = \left(\sqrt[n]{r}\right)^n.\left(e^{i\theta/n}\right)^n = re^{i\theta} = a$

Puis on résout $X^n = a \iff X^n = r_0^n \iff \left(\frac{X}{r_0}\right)^n = 1 \iff \begin{cases} U^n = 1 \\ X/_{r_0} = U \end{cases}$

Exercice 15. Pour les équations suivantes

$$(z-1)^3 = 8, \qquad z^4 = 1+i \qquad (z+1)^n = 1 \qquad (z+i)^n = (z-i)^n$$

1. Combien l'équation a-t-elle de solution ?
2. Déterminer les solutions.
3. Placer les solutions sur un Bô dessin (en expliquant le Bô dessin).

Exercice 16. [Correction] Calcul de $\tan\dfrac{\pi}{5}$, $\tan\dfrac{2\pi}{5}$.

On considère l'équation : $(1+iz)^5 = (1-iz)^5$ (E)

1. D'une part
   (a) Combien l'équation (E) a-t-elle de solution ?
   (b) Résoudre l'équation développée.
2. D'autre part.
   (a) Résoudre, à l'aide des racines cinquièmes de l'unité, l'équation $(1+iz)^5 = (1-iz)^5$ dans $\mathbb{C}$.
   (b) Exprimer les racines à l'aide des fonctions usuelles.
3. En déduire la valeur des nombres $\tan\dfrac{\pi}{5}$, $\tan\dfrac{2\pi}{5}$ sous la forme $\sqrt{p+q\sqrt{n}}$ où p, q et n sont des éléments de $\mathbb{N}$.

4.3 Factorisation des polynômes.

Théorème 12.

Factorisation de X^3-1.

Le polynôme X^3-1 est de degré 3 donc il admet 3 racines dans $\mathbb{C}$.
De plus $X^3-1=0 \iff X^3=1 \iff X=1, j, j^2$,

Conclusion : on a la factorisation $X^3-1 = 1(X-1)(X-j)(X-j^2)$

Factorisation de X^n-1.

Le polynôme X^n-1 est de degré n donc il admet n racines dans $\mathbb{C}$.
De plus $X^n-1=0 \iff X^n=1 \iff X = \underbrace{\omega_0}_{=1}, \omega_1, ..., \omega_{n-1}$

Conclusion : on a la factorisation $X^n-1 = 1(X-1)(X-\omega_1)\cdots(X-\omega_{n-1})$

Factorisation de X^n-a.

Le polynôme X^n-a est de degré n donc il admet n racines dans $\mathbb{C}$.
De plus $X^n-a=0 \iff X^n=a \iff X = X_0, X_0\omega_1, ..., X_0\omega_{n-1}$

Conclusion : on a la factorisation $X^n-1 = 1(X-X_0)(X-X_0\omega_1)\cdots(X-X_0\omega_{n-1})$

Exercice 17. Soit a, b des complexes.
Montrer que : $a^3+b^3 = (a+b)\left(a+bj\right)\left(a+bj^2\right)$

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Résoudre l'équation $(X+1)^n = 1$ et simplifier l'expression des racines.
2. Factoriser le polynôme $P(X) = (X+1)^n - 1$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Correction.

Solution de l'exercice 3 (Énoncé) Pour les inéquations, on finit avec un tableau de signe ! ! ! ! ! !

$$\frac{3x+1}{2x-3} \geqslant 3 \iff \frac{3x+1}{2x-3} - 3 \geqslant 0 \iff \frac{-3x+10}{2x-3} \geqslant 0 \quad \textit{On finit avec un tableau de signe}$$

$$\frac{2+{}^{1}/_{x}}{3+{}^{2}/_{x}} \geqslant 3 \iff \frac{2+{}^{1}/_{x}}{3+{}^{2}/_{x}} - 3 \geqslant 0 \iff \frac{-7x-5}{3x+2} \geqslant 0 \quad \textit{On finit avec un tableau de signe}$$

$$\frac{3x}{10} \geqslant \frac{5}{6x} \iff \frac{3x}{10} - \frac{5}{6x} \geqslant 0 \iff \frac{18x^2-50}{60x} \geqslant 0 \iff \frac{18(x-r)(x-r')}{60x} \geqslant 0 \quad \textit{On finit avec un tableau de signe}$$

$$x^{n+1} + x^n \geqslant 0 \iff x^n(x+1) \geqslant 0 \quad \textit{discussion}\begin{cases} \textit{Lorsque n est pair : on sait que } x^{pair} \textit{ est tjs } \geqslant 0,\ ainsi \cdots \\ \textit{Lorsque n est impair : on sait que } x^{impair} \geqslant 0 \iff x \geqslant 0, \\ \qquad \textit{On finit avec un tableau de signe} \end{cases}$$

$$\ln(x^2) - \ln(x) - 6 \geqslant 0 \iff 2\ln(x) - \ln(x) - 6 \geqslant 0 \iff \ln(x) \geqslant 6 \iff x \geqslant e^6$$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé) Pour les inéquations, on finit avec un tableau de signe ! ! ! ! ! !

$$\frac{3x+1}{2x-3} \geqslant 3 \iff \frac{3x+1}{2x-3} - 3 \geqslant 0 \iff \frac{-3x+10}{2x-3} \geqslant 0 \quad \textit{On finit avec un tableau de signe}$$

$$\frac{2+{}^{1}/_{x}}{3+{}^{2}/_{x}} \geqslant 3 \iff \frac{2+{}^{1}/_{x}}{3+{}^{2}/_{x}} - 3 \geqslant 0 \iff \frac{-7x-5}{3x+2} \geqslant 0 \quad \textit{On finit avec un tableau de signe}$$

$$\frac{3x}{10} \geqslant \frac{5}{6x} \iff \frac{3x}{10} - \frac{5}{6x} \geqslant 0 \iff \frac{18x^2-50}{60x} \geqslant 0 \iff \frac{18(x-r)(x-r')}{60x} \geqslant 0 \quad \textit{On finit avec un tableau de signe}$$

$$x^{n+1} + x^n \geqslant 0 \iff x^n(x+1) \geqslant 0 \quad \textit{discussion}\begin{cases} \textit{Lorsque n est pair : on sait que } x^{pair} \textit{ est tjs } \geqslant 0,\ ainsi \cdots \\ \textit{Lorsque n est impair : on sait que } x^{impair} \geqslant 0 \iff x \geqslant 0, \\ \qquad \textit{On finit avec un tableau de signe} \end{cases}$$

$$\ln(x^2) - \ln(x) - 6 \geqslant 0 \iff 2\ln(x) - \ln(x) - 6 \geqslant 0 \iff \ln(x) \geqslant 6 \iff x \geqslant e^6$$

Solution de l'exercice 6 (Énoncé)

On discute selon les valeurs du paramètre m les solutions du système $(S)\begin{cases} 2x+y &= 4 \\ 3x-y &= 1 \\ -5x+3y &= m \end{cases}$

On commence par trigonaliser le système

$$\begin{cases} 2x+\ \ y = 4 \\ 3x-\ \ y = 1 \\ -5x+3y = m \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+\ \ \ \ y = 4 \\ 0x-\ \frac{5}{2}y = -5 \\ 0x+\frac{11}{2}y = m+10 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+\ \ y = 4 \\ 0x-\frac{5}{2}y = -5 \\ 0x+\ 0y = m-1 \end{cases}$$

Lorsque $m \neq 1$

Alors le système (S) n'a pas de solution.

Lorsque $m = 1$

Alors le système (S) a une unique solution $(x,y) = (1,2)$

Solution de l'exercice 8 (Énoncé)

> On trigonalise

$$\begin{cases} 2x-3y+\ 4z=-3 \\ -x+2y+\quad z=5 \\ 4x-5y+14z=1 \end{cases} \iff \begin{cases} -x+2y+\quad z=5 \\ 2x-3y+\ 4z=-3 \\ 4x-5y+14z=1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x+2y+\quad z=5 \\ 0x+\ y+\ 6z=7 \\ 0x+3y+18z=21 \end{cases} \iff \begin{cases} -x+2y+\ z=5 \\ 0x+\ y+6z=7 \\ 0x+0y+0z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x+2y+\ z=5 \\ \qquad y+6z=7 \end{cases}$$

Les solutions de $\begin{cases} 2x-3y+\ 4z=-3 \\ -x+2y+\quad z=5 \\ 4x-5y+14z=1 \end{cases}$ sont $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -11 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$

> On trigonalise

$$\begin{cases} x+2y+z+\ t=1 \\ x\qquad +z+\ t=3 \\ \qquad y\quad +\ t=-1 \\ x+\ y+z+2t=2 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y+z+t=1 \\ 0x-2y\qquad =2 \\ \qquad y\quad +t=-1 \\ 0x-\ y\quad -t=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y+z+t=1 \\ \qquad y\qquad =-1 \\ \qquad\qquad t=0 \end{cases}$$

Les solutions de $\begin{cases} x+2y+z+\ t=1 \\ x\qquad +z+\ t=3 \\ \qquad y\quad +\ t=-1 \\ x+\ y+z+2t=2 \end{cases}$ sont $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Solution de l'exercice 9 (Énoncé)

On cherche P un polynôme de degré 2

donc on cherche $P(X)=aX^2+bX+c$ avec $a,b,c\in\mathbb{C}$. Ainsi

$$\begin{cases} P(1)=2 \\ P(2)=1 \\ P(3)=2 \end{cases} \iff \begin{cases} a+\ b+c=2 \\ 4a+2b+c=1 \\ 9a+3b+c=2 \end{cases}$$

On résout le système et on trouve $a=1$, $b=-4$ et $c=5$, ainsi $P(X)=X^2-4X+5$

Autre solution.

Comme $P(1)=P(3)=2$, alors 1 et 3 sont racines de $P(X)-2$ et on a $P(X)-2=a(X-1)(X-3)$

De plus $P(2)=1$ ainsi $P(2)-2=a(2-1)(2-3)$ et donc $a=1$

Conclusion : $P(X)=(X-1)(X-3)+2=X^2-4X+5$

Solution de l'exercice 12 (Énoncé) Avec un cercle trigo, on a $e^{i\frac{\pi}{3}}=-j^2$, ainsi on a

$$\begin{aligned} c-a=e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a) &\iff c-a=-j^2(b-a) \\ &\iff (j^2+1)a-j^2b-c=0 \\ &\iff -ja-j^2b-c=0 \\ &\iff (-j)\left[a+bj+cj^2\right]=0 \\ &\iff a+bj+cj^2=0 \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 16 (Énoncé) Calcul de $\tan\frac{\pi}{5}$, $\tan\frac{2\pi}{5}$.

On considère l'équation

$$(1+iz)^5=(1-iz)^5 \quad (E)$$

1. D'une part

   (a) Combien y a-t-il de solution d'une équation polynômiale ?

   On a $(E)\Leftrightarrow(1+iz)^5-(1-iz)^5=0$

   On a

Tout d'abord

$$(1+iz)^5 = iz^5 + 5z^4 - 10iz^3 - 10z^2 + 5iz + 1$$

$$(1-iz)^5 = -iz^5 + 5z^4 + 10iz^3 - 10z^2 - 5iz + 1$$

$\Longrightarrow$ Ainsi

$$\begin{aligned}
(E) &\iff (1+iz)^5 - (1-iz)^5 = 0 \\
&\iff \left(iz^5 + 5z^4 - 10iz^3 - 10z^2 + 5iz + 1\right) \\
&\qquad - \left(-iz^5 + 5z^4 + 10iz^3 - 10z^2 - 5iz + 1\right) = 0 \\
&\iff 2iz^5 - 20iz^3 + 10iz = 2 \\
&\iff 2iz\left(z^4 - 10z^2 + 5\right) = 0
\end{aligned}$$

Donc l'équation est polynômiale de degré 5, il y a 5 racines dans $\mathbb{C}$.

(b) On résout l'équation dans $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
(E) &\iff 2iz\left(z^4 - 10z^2 + 5\right) = 0 = 0 \\
&\iff [z = 0] \text{ ou } \left[z^4 - 10z^2 + 5 = 0\right]
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ On résout (B)

$$z^4 - 10z^2 + 5 = 0$$

$$\iff \begin{cases} U^2 - 10U + 5 = 0 \\ \\ \text{et } z^2 = U \end{cases} \Leftrightarrow \dots$$

Conclusion : Il y a 5 racines 0, $\sqrt{5-2\sqrt{5}}$, $-\sqrt{5-2\sqrt{5}}$, $\sqrt{2\sqrt{5}+5}$, $-\sqrt{2\sqrt{5}+5}$

2. D'autre part.

   Fait en classe : On trouve 5 racines : $0, \tan\frac{\pi}{5}, \tan\frac{2\pi}{5}, \tan\frac{3\pi}{5}, \tan\frac{4\pi}{5}$

3. Il faut identifier **Mais qui est qui ! ! ! !**

   On sait que

$$-\sqrt{2\sqrt{5}+5} < -\sqrt{5-2\sqrt{5}} < 0 < \sqrt{5-2\sqrt{5}}, < \sqrt{2\sqrt{5}+5},$$

   Avec le graphe de tangente, on a

$$\tan\frac{3\pi}{5} < \tan\frac{4\pi}{5} < 0 < \tan\frac{\pi}{5} < \tan\frac{2\pi}{5}$$

   On a donc $\tan\frac{\pi}{5} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$ et $\tan\frac{2\pi}{5} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$.