DM 5. Arc-tangente et John Machin

Une copie par personne.
Note historique :

John Machin (1680-1751) est un mathématicien anglais connu principalement pour avoir calculé, en 1706, 100 décimales du nombre π grâce à la formule qui porte son nom.
Donc son nom n'est pas un jeu de mot !

Exercice 1. [Correction]

1. La formule de John Machin
   Je note $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{5}\right)$ et $\beta = \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$
   (a) Calculer $\tan 2x$ en fonction de $\tan x$.
   En déduire la valeur de $\tan(2\alpha)$ puis $\tan(4\alpha)$.
   (b) Montrer que : $4\alpha - \beta$ est une solution de l'équation $\tan(X) = 1$
   (c) Justifier que $0 < \beta \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{4}$.
   Encadrer $4\alpha - \beta$.
   Puis en déduire la formule de John Machin, CàD $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$.
2. La formule de John Machin (deuxième démonstration)
   On considère le complexe $A = \frac{(5+i)^4}{239+i}$
   (a) D'une part. Mettre le complexe A sous forme algébrique puis circulaire.
   (b) D'autre part.
   Calculer $\cos(\arctan a)$ et $\sin(\arctan a)$
   Soit $x > 0$. Montrer que : $x + i = \sqrt{x^2+1}\, e^{i\arctan(1/x)}$.
   En déduire une nouvelle fore circulaire du complexe A
   (c) En déduire que : $4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$
   attention rigueur : $e^{i\alpha} = e^{i\beta} \nRightarrow \alpha = \beta$. *Mais* $e^{i\alpha} = e^{i\beta} \iff \alpha \equiv \beta \mod [2\pi]$
3. Approximation de $\arctan(a)$
   Soit $a \in]0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère

$$s_n(a) = a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{a^{2k+1}}{2k+1}$$

   (a) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} = \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}$
   (b) En déduire que : $s_n(a) - \arctan(a) = (-1)^n \int_0^a \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \int_0^a \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt \leqslant \frac{a^{2n+3}}{2n+3}$
   (d) En déduire que : $\left|s_n(a) - \arctan(a)\right| \leqslant \frac{a^{2n+3}}{2n+3}$
   (e) La suite $(s_n(a))$ converge-t-elle ?

4. Approximation de π.

(a) Montrer que :
$$\left|\frac{\pi}{4} - 4\, s_n\left(\frac{1}{5}\right) + s_n\left(\frac{1}{239}\right)\right| \leqslant 4\frac{1}{(2n+3)5^n} + \frac{1}{(2n+3)239^n} \leqslant \frac{1}{5^{n-1}}$$

(b) Application : Calcul de 3 décimales de π

$>$ Lorsque $n = 3$, on a $4\dfrac{1}{(2\,.3+3)5^3} + \dfrac{1}{(2\,.3+3)239^3} = \dfrac{4}{9.125} + \dfrac{1}{9.13\ 651\ 919}$
$$= 0,0035.... + 0.0000.... \approx 0.0035$$

Ainsi $\left|\dfrac{\pi}{4} - 4\, s_3\left(\dfrac{1}{5}\right) + s_3\left(\dfrac{1}{239}\right)\right| \leqslant 0.0035$
$$\Longrightarrow \left|\pi - 16\, s_3\left({}^1\!/_5\right) + 4 s_3\left({}^1\!/_{239}\right)\right| \leqslant 4 \times 0.0035 = 0,014$$

$>$ De plus on a

$$\begin{aligned} s_3\left({}^1\!/_5\right) &= \sum_{k=0}^{3} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)\,5^{2k+1}} \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{375} + \frac{1}{15\ 625} \\ &= 0.2 - 0,0026... + 0,000064 + 0,00000... \\ &\approx 0,1974 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_3\left({}^1\!/_{239}\right) &= \sum_{k=0}^{3} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)\,239^{2k+1}} \\ &= \frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} - \frac{1}{7.239^7} \\ &\approx 0,0042 \end{aligned}$$

$>$ On a $\begin{aligned}[t] 16\, s_3\left({}^1\!/_5\right) - 4 s_3\left({}^1\!/_{239}\right) &= 16 \times 0,1974 - 4 \times 0,0042 \\ &= 3,1584 - 0,0168 \\ &= 3,1416 \end{aligned}$

Conclusion : $\left|\pi - 16\, s_3\left({}^1\!/_5\right) + 4 s_3\left({}^1\!/_{239}\right)\right| = \left|\pi - 3,1416\right| \leqslant 0.014$

Avec une meilleur analyse/contrôle de l'erreur, on montre que $\left|\pi - 3,1416\right| \leqslant 0.001$

on a donc 3 décimales justes,

$$\boxed{\text{CàD } \pi \approx 3,141...}$$

(c) Déterminer n pour que l'erreur commise soit $\leqslant 10^{-100}$, CàD que l'approximation ait 100 décimales justes. Proposer un programme Python qui calcule 100 décimales de π

Si vous êtes courageux (comme John Machin) faites le calcul à la main.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. On va calculer
$$4\arctan(\frac{1}{5})-\arctan(\frac{1}{239})$$
.
Je note $\alpha=\arctan(\frac{1}{5})$ et $\beta=\arctan(\frac{1}{239})$

   (a) Un peu de calcul.

      i. Ok

      ii. On a $\tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$.
      Comme $\alpha=\arctan(\frac{1}{5})$ et $\arctan(\frac{1}{5})$ vérifie l'équation $\tan x=\frac{1}{5}$ on a $\tan\alpha=\frac{1}{5}$
$$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2.\frac{1}{5}}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{5}{12}$$
$$Ainsi$$
$$\tan(4\alpha)=\frac{2\tan(2\alpha)}{1-\tan^2(2\alpha)}=\frac{2.\frac{12}{5}}{1-\left(\frac{12}{5}\right)^2}=\frac{120}{119}$$

      iii. On a $\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$, ainsi
$$\tan(4\alpha-\beta)=\tan(4\alpha+(-\beta))=\frac{\tan(4\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(4\alpha)\tan(\beta)}=.....=1$$

   (b) Conclusion.

      > Comme $\tan(4\alpha-\beta)=1$, $4\alpha-\beta$ est une solution de l'équation $\tan(X)=1$.

      > On sait que $\tan(X)=1 \iff X\equiv\frac{\pi}{4}\,mod\,[\pi]$.

      > Comme $Arctangente$ est strictement croissante, on a bien
$$0=\arctan(0)<\arctan(\frac{1}{239})<\arctan(\frac{1}{5})<\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$$
      Ainsi $0\leqslant 4\alpha-\beta\leqslant 4\frac{\pi}{4}-0=\pi$
      Sur $]0,\pi[$, l'équation $\tan(X)=1$ a une unique solution $\frac{\pi}{4}$

      A cause de l'unicité, $4\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$

2.

   (a) Somme géo

   (b) On intègre l'égalité précédente sur $[0,a]$
      Ainsi $\displaystyle\int_0^a Gauche\,dt=\int_0^a Droite\,dt$
$$\int_0^a Gauche\,dt=\cdots=a-\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{a^{2n+1}}{2n+1}$$
$$\int_0^a Droite\,dt=\cdots=\arctan(a)+(-1)^n\int_0^a\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$$

   (c) On a
$$\int_0^a\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt\leqslant\int_0^a\frac{t^{2n+2}}{1+0}\,dt=\big[Primitive\big]_0^a=\frac{a^{2n+3}}{2n+3}$$

(d) On a

$$\begin{aligned}
|s_n(a) - arctan(a)| &= \left|\int_0^a \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\,dt\right| \\
&\textit{Inégalité triangulaire} \\
&\leqslant \int_0^a \left|\frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\right| dt \\
&\textit{On simplifie les V.A.} \\
&\leqslant \int_0^a \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt \\
&\textit{On utilise la question précédente} \\
&\leqslant \frac{a^{2n+3}}{2n+3}
\end{aligned}$$

(e) La suite $(s_n(a))$ converge vers $\arctan(a)$

3. Approximation de π.

(a) On a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\pi}{4} - 4\,s_n\left(\frac{1}{5}\right) + s_n\left(\frac{1}{239}\right)\right| &= \left|4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) - 4\,s_n\left(\frac{1}{5}\right) + s_n\left(\frac{1}{239}\right)\right| \\
&= \left|4\left[\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - s_n\left(\frac{1}{5}\right)\right] - \left[\arctan\left(\frac{1}{239}\right) - s_n\left(\frac{1}{239}\right)\right]\right| \\
&\leqslant 4\left|\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - s_n\left(\frac{1}{5}\right)\right| \oplus \left|\arctan\left(\frac{1}{239}\right) - s_n\left(\frac{1}{239}\right)\right| \\
&\leqslant 4\frac{1}{(2n+3)5^n} + \frac{1}{(2n+3)239^n} \\
&\leqslant 4\frac{1}{(1)\,5^n} + \frac{1}{(1)\,5^n} = \frac{1}{5^{n-1}}
\end{aligned}$$

(b) L'erreur commise soit $\leqslant 10^{-100}$, CàD que l'approximation ait 100 décimales justes, lorsque

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5^{n-1}} \leqslant 10^{-100} &\iff 10^{100} \leqslant 5^{n-1} \\
&\iff 100\ln(10) \leqslant (n-1)\ln(5) \\
&\iff 100\frac{\ln(10)}{\ln(5)} + 1 \leqslant n \\
&\iff 100 \times 1.43 + 1 \leqslant n \\
&\iff 145 \leqslant n
\end{aligned}$$

Proposer un programme Python qui calcule 100 décimales de π

Si vous êtes courageux (comme John Machin) faites le calcul à la main.