EDL : Équations Différentielles Linéaire.

1 Primitives

1.1 Rappel

La grille classique pour les calculs de primitive est

> Monôme : par exemple $\dfrac{1}{x^n\sqrt{x}}$

Mélange : par exemple $\sqrt{2x}+\dfrac{1}{2x}=\sqrt{2}\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x}$

> Produit, Quotient, Composée : Bli,Bli, Bli

$\dfrac{\square'}{\square}$ et $\square'\square$ et même $\square'\square^\alpha$: par exemple $\dfrac{1}{x\ln(x)}$ et $\dfrac{\ln(x)}{x}$

$f(sympa)=f(u)\rightsquigarrow \dfrac{1}{u'}F(u)$: par exemple $\sqrt{1-x}$

> DES=décomposition en éléments simples : par exemple $\dfrac{1}{x(x-1)}$ ou $\dfrac{1}{x^2-1}$

> Trigo avec produit $\rightsquigarrow$ plus de produit

Théorème 1. Kulture ou IPP

On peut aussi connaitre

> Une primitive de $t\,e^{-t}$ est de la forme $(at+b)\,e^{-t}$

Une primitive de $(t^2+1)\,e^{2t}$ est de la forme $(at^2+bt+c)\,e^{2t}$

CàD (poly du même degré)$\times$ la même exp

> Une primitive de $\cos(t)\,e^{-t}$ est de la forme $\left[a\cos(t)+b\sin(t)\right]\,e^{-t}$

Une primitive de $\sin(t)\,e^{2t}$ est de la forme $\left[a\cos(t)+b\sin(t)\right]\,e^{2t}$

De façon plus générale les intégrales/primitives suivantes se font avec des IPP

$$\int^x \ln(t)\,dt \qquad \int^x \arctan(t)\,dt \qquad \int^x t\,e^{-t}\,dt \qquad \int^x \sin(t)\,e^{2t}\,dt$$

Il restera au programme une dernière primitive difficile
que l'on verra au moment du cours sur DES.

1.2 Une primitive difficile.

2 Primitiver une égalité

Théorème 2. Primitivation des égalités.

Soit $f : x \longmapsto f(x)$ et $g : x \longmapsto g(x)$ deux fonctions continues sur un intervalle I.

On suppose que $\forall x \in I,\ f(x) = g(x)$

On peut primitiver l'égalité C'est possible car les fonctions sont continues,

Ainsi il existe une constante K tel que : $\forall x \in I,\ F(x) = G(x) + K$

De plus quand on primitive une égalité, on conserve les $\Longleftrightarrow$

Exemple classique en math : on va résoudre l'équation $f'' = 0$.

$f'' = 0$, CàD $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = 0$.

On primitive l'égalité

Ainsi il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \underbrace{0}_{\textit{Une primitive de } 0} + a = a$.

On primitive à nouveau l'égalité

Ainsi il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \underbrace{ax}_{\textit{Une primitive de } a} + b$.

Conclusion : $f'' = 0 \Longleftrightarrow$ il existe a,b tel que : $\forall \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$

Théorème 3. Deux applications classiques

En physique

En mécanique, on rencontre $y'' = g$ où g est la gravitation!!!! On a alors

$$y'' = g \Longleftrightarrow y''(t) = g \Longleftrightarrow y'(t) = gt + \underbrace{K}_{=y'(0)}$$

$$\Longleftrightarrow y(t) = \frac{1}{2} g t^2 + y'(0)\, t + \underbrace{L}_{y(0)}$$

$$\text{Conclusion : } \forall t \geqslant 0,\ y(t) = \frac{1}{2} g t^2 + \underbrace{y'(0)}_{=v_0}\, t + \underbrace{y(0)}_{=h_0}$$

En math

Soit f une fonction $\mathscr{C}^\infty$ et $n \in \mathbb{N}$. On a l'équivalence

$$f^{(n)} = 0 \Longleftrightarrow \textit{La fonction } f \textit{ est un polynôme de degré} \leqslant n$$

3 EDL1

3.1 Vocabulaire et description des solutions.

Définition 4. Vocabulaire.
Soit I un intervalle.
Soit $a : x \mapsto a(x)$, $b : x \mapsto b(x)$ et $\lambda : x \mapsto \lambda(x)$ des fonctions continues de I, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

> Une équation fonctionnelle
est une équation où l'inconnue est une fonction, souvent notée y.

> Une équation différentielle est une équation fonctionnelle faisant intervenir y, y'.

> Une *équation différentielle linéaire d'ordre 1* est une équation de la forme

$$\underbrace{\lambda(x)\, y' + a(x)\, y}_{\text{Partie Homogène}} = \underbrace{b(x)}_{\text{2-ième membre}}$$

> Une *équation différentielle linéaire d'ordre 1 normalisé* est une équation de la forme

$$\underbrace{1\, y' + a(x)\, y}_{\text{Partie Homogène Normalisée}} = \underbrace{b(x)}_{\text{2-ième membre}}$$

L'équation différentielle homogène associé est donc $y' + a(x)y = 0$.

Vocabulaire : Résoudre ou intégrer une équation différentielle,
c'est trouver toutes les fonctions **dérivables** y qui vérifient l'équation.

Théorème 5. Description de la forme des solutions d'une EDL1
Soit a, b des fonctions continues sur un intervalle I.
Soit l'équation normalisée : $y' + a(x)y = b(x)$.

Alors les solutions y de l'equa diff sont la somme de

> Une solution particulière $y_p : x \longmapsto y_p(x)$ de l'équa diff complète

> Les solutions $h : x \longmapsto h(x)$ de l'équa diff homogène

$$\boxed{\text{Ainsi on a : } \forall x \in I,\ y(x) = y_p(x) + h(x)}$$

Soit y une solution quelconque de l'équation complète et y_p une solution particulière de l'équation complètes.

On a
$$\begin{aligned} y' + \quad a(x)\, y &= b(x) \\ y_p' + \quad a(x)\, y_p' &= b(x) \end{aligned}$$

On fait la différence ainsi $(y - y_p)' + a(x)\,(y - y_p) = 0$

Conclusion : $y = y_p + h$

3.2 Résoudre l'équation homogène.

Théorème 6. Le théorème générale

Soit a des fonctions continues sur un intervalle I.

On suppose que : h est une fonction solution de l'équation différentielle : $y' + a(x)y = 0$.

On note $A : x \longmapsto A(x)$ une primitive (sur I) de la fonction $a : x \longmapsto a(x)$

$$\text{Alors il existe une constante } K \text{ tel que } \forall\, x \in I,\ h(x) = K\,e^{-A(x)}$$

D'une part.

les fonctions de la forme $K\,e^{-A(x)}$ sont solution de l'équation différentielle.

D'autre part. On suppose que h est une solution de l'équation différentielle.

$$\boxed{\text{On va montrer que } h(x) \text{ est forcément de la forme } h(x) = K\,e^{-A(x)}}$$

On étudie la fonction $\varphi : x \longmapsto h(x)e^{A(x)}$

On déduit de l'étude que la fonction φ est constante sur I

CàD $\forall\, x \in I,\ h(x)e^{A(x)} = K \iff h(x)e^{A(x)} = K\,e^{-A(x)}$

Théorème 7. Le théorème spécial physique

On suppose que : $h(t)$ vérifie l'équation différentielle : $y' + \dfrac{1}{\tau}y = 0$.

On sait que $1/_\tau \overset{\text{Une primitive}}{- - - - >} t/_\tau$ Ici la variable c'est t

$$\text{Alors il existe une constante } K \text{ tel que } \forall\, t \geqslant 0,\ h(t) = K\,e^{-t/_\tau}$$

3.3 Méthode de variation de la constante.

Théorème 8. Solution particulière de l'equa diff complète

Soit a, b des fonctions continues sur un intervalle I.

Soit l'équation normalisée : $y' + a(x)y = b(x)$.

> Est ce que l'on ne vous a pas donné une solution particulière y_p à la question Q.1.a?

> Sinon **À la physicienne,** on essaye une solution particulière "évidente",

CàD on essaye $y_p : x \longmapsto C$ ou $y_p : x \longmapsto C\,x$ avec $C = C_{onstante}$

> Sinon *Méthode de variation de la constante*

On cherche une solution particulière de la forme $\lambda(x)\,h(x)$.

Les calculs conduisent alors à : $\lambda'(x)\,h(x) = b(x) \iff \lambda'(x) = \dfrac{b(x)}{h(x)} \overset{\text{Une primitive}}{- - - - >}$

Théorème 9. Principe de Superposition.

Soit u, v, w_1, w_2 sont des fonctions définie sur un intervalle I.

On suppose de plus que sur I la fonction u ne s'annule pas, CàD $\forall\, x \in I,\ u(x) \neq 0$.

On suppose

> La fonction y_1 est une solutions particulière (sur I) de : $u(x)y' + v(x)y = w_1(x)$.

> La fonction y_2 est une solutions particulière (sur I) de : $u(x)y' + v(x)y = w_2(x)$.

Alors la fonction $y_1 + y_2$ est une solutions particulière (sur I)
de l'équation différentielle $u(x)y' + v(x)y = w_1 + w_2$.

4 EDL2 à coefficients constants

4.1 Vocabulaire et description des solutions.

Définition 10. Vocabulaire.
Soit I un intervalle ouvert non vide.
Soit a, b et c trois constantes et f une fonction continue sur I

> On dit que

$$\underbrace{ay'' + by' + cy}_{\text{Partie Homogène}} = \underbrace{f(x)}_{\text{2-ième membre}}$$

est une *équation différentielle linéaire du deuxième ordre.*

> On dit que : $ay'' + by' + cy = 0$ est *l'équation différentielle homogène associée.*

Théorème 11. Description de la forme des solutions d'une EDL2
Soit a, b, c des constantes et ϕ une fonction continue sur un intervalle I.
Soit l'équation normalisée : $ay'' + by' + cy = \phi(x)$.

Alors les solutions y de l'equa diff sont la somme

> D'une solution particulière y_p de l'équa diff complète

> Des solutions h de l'équa diff homogène.

CàD on a : $\forall x \in I, \ y(x) = y_p(x) + h(x)$

C'est la même démonstration que pour l'ordre 1.

4.2 Résolution de l'équation homogène.

Définition 12. Équation Caractéristique.
Soit a, b, c trois constantes et soit (H) l'équation différentielle homogène $a\,h'' + b\,h' + c\,h = 0$

On dit que : $aX^2 + bX + c = 0$ est l'équation caractéristique de (H).

Théorème 13. Équa diff classique d'ordre 2.
Soit l'équa diff classique d'ordre 2 (homogène) $a\,h'' + b\,h' + c\,h = 0$ avec a, b, c des constantes,
et son équation caractéristique $ax^2 + bx + c = 0$

$\boxed{\text{Lorsque } \Delta = b^2 - 4ac > 0}$

Alors l'équation caractéristique admet 2 solutions distinctes r et r' dans $\mathbb{R}$.
et les solutions h sont de la forme

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ h(x) = \lambda e^{rx} + \mu e^{r'x} \quad \textit{avec } \lambda, \mu \textit{ des constantes.}$$

$\boxed{\text{Lorsque } \Delta = b^2 - 4ac = 0}$

Alors l'équation caractéristique admet 1 seule solution $r = r'$
et les solutions h sont de la forme

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ h(x) = \lambda e^{rx} + \mu x e^{rx} = (\lambda + \mu x).e^{rx} \quad \textit{avec } \lambda, \mu \textit{ des constantes.}$$

$\boxed{\text{Lorsque } \Delta = b^2 - 4ac < 0}$

Alors l'équation caractéristique admet 2 solutions $r = \alpha + i\beta$ et $r' = \overline{r} = \alpha - i\beta$
et les solutions h sont de la forme

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ h(x) = \lambda\, e^{\alpha x}\cos(\beta t) + \mu\, e^{\alpha x}\sin(\beta t) \quad \textit{avec } \lambda, \mu \textit{ des constantes.}$$

Remarque : Les constantes λ, μ se calculent avec les conditions initiales.

Démonstration : Démonstration "Version écrit"

On va résoudre l'équation diff $y'' - 5\,y' + 6\,y = 0$
Ici $a = 1$, $b = -5$, $c = 6$ et $r = 2$ et $r' = 3$ sont les sol de l'eq caract

> Question/Étape 1 : Montrer que :

f est sol de $y'' - 5\,y' + 6\,y = 0$ Ssi $g = f' - 2f$ est sol de $y' - 3y = 0$

Démonstration : C'est longuet à rédiger mais pas difficile. On fait $\Longrightarrow$ et $\Longleftarrow$

$$\text{Conclusion : } y'' - 5\,y' + 6\,y = 0 \iff \begin{cases} g = f' - 2f \\ \textit{et} \\ g' - 3g = 0 \end{cases}$$

> Question/Étape 2 : On résout (A) puis on résout (B)

–> Les sol de $g' - 3g = 0$ sont : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ g(x) = A\,e^{3x}$ avec $K \in \mathbb{R}$

–> Les sol de $f' - 2f = g = A\,e^{3x}$ sont (Je vous laisse faire les calculs qui sont plus ambigus qu'il y parait)

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \underbrace{A'\,e^{3x}}_{\textit{Une sol part}} + \underbrace{B'\,e^{2x}}_{\textit{Les sol de l'eq Homo}}$$

Conclusion on a bien : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = ...\,e^{3x} + ...\,e^{2x}$. **Yes!!!**

Démonstration : Démonstration "Version oral péchue"

Soit h une solution de l'équation différentielle homogène

On va chercher l'équation différentielle vérifiée par la fonction $f = h.e^{-rx} \iff h = f e^{rx}$

$\boxed{\text{Situation } \Delta \neq 0}$

> On calcule h' et h", on trouve

$$\begin{aligned} h' &= f'e^{rx} + rfe^{rx} \\ &= (f' + rf)e^{rx} \end{aligned} \qquad et \qquad \begin{aligned} h" &= f"e^{rx} + 2rf'e^{rx} + r^2ye^{rx} \\ &= (f" + 2rf' + r^2f)e^{rx} \end{aligned}$$

> Comme h vérifie (H), on a

$$\begin{aligned} ah" \quad &+ bh' + ch = 0 \\ &\iff (af" + 2rf' + r^2f)e^{rx} + (bf' + rf)e^{rx} + cf.e^{rx} = 0 \\ &\iff \left[af" + (2ra+b)f' + (ar^2 + br + c)f\right] e^{rx} = 0 \\ &\quad Or\ e^{rx} \neq 0\ et\ ar^2 + br + c = 0\ car\ r\ est\ une\ sol\ de\ l'équation\ caractéristique. \\ &\iff af" + (2ra+b)f' = 0 \end{aligned}$$

> On remarque que comme r et r' sont solution de l'équa caractéristique,

on a $r + r' = {-b}/{a}$ et donc $2ra + b = a(2r + \dfrac{b}{a}) = a(2r - r - r') = 2a(r - r')$

Ainsi on a

$$af" + (2ra+b)f' = 0 \iff af" + a(r-r')f' = 0 \iff f" - (r-r')f' = 0$$

On applique la théorie des équations différentielles d'ordre 1 à la fonction f' et on en déduit $\forall x,\ f'(x) = \alpha e^{(r'-r)x}$.

> On primitive, on a $f(x) = \beta e^{(r'-r)x} + \alpha$

Conclusion : $\forall x, \quad h(x) = f(x)e^{rx} = \lambda e^{rx} + \mu e^{r'x}$

Fini.

$\boxed{\text{Situation } \Delta = 0}$

C'est la même démonstration mais comme $\Delta = 0$ on a en plus $r = {-b}/{2a}$

donc $ar^2 + br = 0$ Ainsi $af" + bf' + cf = 0 \iff af" = 0$.

Ainsi $f" = 0 \iff f' = \alpha \iff f = \alpha x + \beta$

Conclusion : $\forall x, \quad h(x) = f(x)e^{rx} = (\alpha x + \beta)e^{rx}$

4.3 Solution particulière.

Théorème 14. Le principe du miroir.

Pour trouver une solution particulière de l'équation

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

Il n'y a pas de méthode directe, la méthode de variation de la constante n'est pas transposable (en sup du moins) donc il faut s'adapter!!!

Le principe du miroir

$$f(x) \qquad --|-- \qquad y_p(x)$$

$MIROIR$ −−|−− ЯIOЯIM

> Lorsque $f(x)$ = Poly de degré 1,
on cherche une solution particulière $y_p(x)$ = Poly de degré 1.

> Lorsque $f(x)$ = (Poly de degré 1) $\times e^{ax}$,
on cherche une solution particulière $y_p(x)$ = (Poly de degré 1) $\times e^{ax}$

> Lorsque $f(x) = \cos(\omega x)$,
on cherche une solution particulière $y_p(x) = \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x)$

5 Le principe de Cauchy

Théorème 15. Principe de Cauchy d'ordre 1.
Lorsqu'on résout une équation différentielle linéaire d'ordre 1, les solutions dépendent d'une constante k que l'on peut déterminer avec une condition initiale.

Il n'y a alors plus d'indétermination et la solution est unique.

Principe de Cauchy Il existe une unique fonction f

> vérifiant une équa dif d'ordre 1
et
> satisfaisant à la condition initiale $f(x_0) = a$.

Exemple historique.
En terminale, la fonction exp est définie à l'aide de ce principe, CàD

La fonction exp est l'unique fonction vérifiant l'équa diff $y' = y$ et tel que $y(0) = 1$

Théorème 16. Principe de Cauchy d'ordre 2.

Quand on résout une équation différentielle linéaire d'ordre 2,
les solutions dépendent de 2 constante λ et μ que l'on peut déterminer avec une condition initiale.

Il n'y a alors plus d'indétermination et la solution est unique.

Principe de Cauchy Il existe une unique fonction f

> vérifiant une équa dif d'ordre 2
et
> satisfaisant aux conditions initiales $f(x_0) = a$ et $f'(x_0) = b$.

Exemples.
La fonction cos est l'unique fonction vérifiant

vérifiant l'équa diff $y'' = -y$ et tel que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$

La fonction cosh est l'unique fonction vérifiant

vérifiant l'équa diff $y'' = +y$ et tel que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$

`Kulture` : En intégrant les équations différentielle, on a montré que le problème de Cauchy avait une solution unique.
Notre justification est valide car l'équation différentielle est linéaire et donc on sait la résoudre.
Cauchy a démontré ces théorèmes pour toutes les équations différentielles linéaire et non-linéaire. Mais sa démonstration ne permet pas de résoudre explicitement les équations différentielle non-linéaire mais seulement (et c'est déjà remarquable) de justifier qu'elles ont une unique solution.

6 Exercices

Équation du premier ordre

Exercice 1. [Correction] Résoudre les équations différentielles.

1. Sur $]0,+\infty[$, $\left(1+x^2\right)\ y'(x)+2x\ y(x)=\dfrac{1}{x}$
2. Sur $]0,+\infty[$, $2xy'-3y=\sqrt{x}$
3. sur $]0,1[$, $x\,y'+2\,y=\dfrac{1}{1-x^2}$
4. Sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\cos t\ y'+\sin t\ y=1$

Exercice 2. [Correction] Trouver une équation différentielle d'ordre 1 dont les solutions sont les fonctions définie par

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{x+A}{1+x^2}$$

1. Identifier qui doit être la solution de l'équation homogène et la solution particulière.
2. Déterminer l'équation différentielle homogène.
3. Déterminer le second membre.

Exercice 3. Soit $\lambda\neq-1$ et f l'unique fonction solution de l'équation différentielle $y'+y=e^{\lambda x}$ et tel que $f(0)=1$.

Déterminer f puis trouver les réels λ tels que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 4. [Correction] Trouver les fonctions f de $[0,1]$ à valeur dans $\mathbb{R}$ telle que

$$f'+f=f(0)+f(1)\,.$$

Exercice 5. [Correction] On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) .

$$y'+y-xy^2=0\qquad (E)$$

On suppose que la fonction y est une solution de (E) et on suppose que la fonction y ne s'annule pas.
On considère sur $\mathbb{R}$ la fonction z par la formule $z(x)=\dfrac{1}{y(x)}$

1. Déterminer l'équation $\left(E'\right)$ vérifiée par la fonction z.
2. Déterminer $z(x)$ puis $y(x)$.

Exercice 6. [Correction] Soit f une fonction dérivable vérifiant

$$\forall x,y \text{ dans } \mathbb{R},\quad f\left(x+y\right)=f(x)+f\left(y\right)$$

Pour une rédaction propre et claire, on utilisera la phrase : "J'applique l'égalité avec ....."

1. Montrer que $f(0)=0$.
2. Pour la suite, on note $\alpha=f'(0)$.
   (a) Montrer que : $\forall\, t,\quad f'(t)=\alpha$.
   (b) Déterminer f.

Exercice 7. [Correction] Soit f une fonction dérivable vérifiant

$$f\left(x+y\right)=f\left(x\right)f\left(y\right) \quad \text{pour tout } x\in\mathbb{R} \text{ et } y\in\mathbb{R} \quad (E)$$

Pour une rédaction propre et claire, on utilisera la phrase : "J'applique l'égalité avec ....."

1. Calculer $f(0)$ et que la fonction f est positive.
2. On suppose que $f(0)=0$.
   Montrer que : la fonction f est constante égale à 0.
3. On suppose que $f(0)=1$. Et on note $\alpha=f'(0)$.
   (a) Montrer que : $\forall\, t\in\mathbb{R},\ f'(t)=\alpha f(t)$
   (b) Résoudre l'équation différentielle
   (c) Déterminer f.

Exercice 8. Le but est de déterminer les fonctions f définie sur $\mathscr{D}=\mathbb{R}_+^*$, vérifiant

$$\forall\, x,y>0,\ f(xy)=f(x)f(y)$$

1. Généralité.
   (a) Montrer $f(1)=0$ ou $f(1)=1$.
   (b) Montrer que la fonction f est positive.
   (c) On suppose que $f(1)=0$.
   Déterminer f.

$$\boxed{\text{On suppose dorénavant que } f(1)=1}$$

2. On suppose que f est dérivable et que $f(1)=1$. On note $f'(1)=\alpha$.
   Déterminer f.
   Indication : on montrera que f est solution d'une équation différentielle.
3. On suppose que f est simplement continue et que $f(1)=1$.
   Montrer que la fonction f est dérivable puis déterminer f.
   Indication : Comme f est continue alors elle admet des primitives puis on primitive.

Équation du deuxième ordre

Exercice 9. Résoudre, sur $\mathbb{R}$, les équations différentielles suivantes

$$\begin{array}{ll} y''=0 & y''=g \\ y''-y=0 & y''+4y'=0 \\ y''+y=0 & y''+4y=0 \\ y"-4y'+3y=0 & y"-6y'+9y=0 \quad \text{avec } y(0)=1 \text{ et } y'(0)=1 \end{array}$$

Exercice 10. Trouver une solution particulière pour les équations différentielles suivante

$$\begin{array}{l} y''+y'+y=3 \\ y''+y'+y=2x \\ y''+y=x \quad et \quad y''+y=e^{4x} \quad puis \quad y''+y=x+e^{4x} \\ y''+y=\cos(2x) \end{array}$$

Exercice 11. Soit f une fonctions vérifiant : $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=f(-x)$

1. Montrer que f est solution d'une équation différentielle d'ordre 2.
2. Trouver f.

Exercice 12. [Correction] On suppose que la fonction y est solution de l'équation différentielle

$$\forall x>0,\ x^2.y''(x)+3x.y'(x)+y(x)=x^3.$$

On considère la fonction z définie par $z : t \longmapsto z(t)=y\left(e^t\right)$.
On dit en langage vulgaire que l'on fait le changement de variable $x=\sin t$.

1. Trouver l'équation différentielle vérifiée par la fonction z
2. Déterminer la fonction z puis la fonction y.

Exercice 13. [Correction] On considère l'équation différentielle (E)

$$\forall x>0,\ y''+3y'+2y=\frac{x-1}{x^2}e^{-x} \qquad (E)$$

1. Résoudre l'équation homogène.
2. Chercher une solution particulière y_0 de la forme $y_0(x)=z(x)e^{-x}$, où z est une fonction à déterminer.
3. Conclure.

Exercice 14. Soit $y : x \longmapsto y(x)$ une solution de l'équation différentielle (E)

$$\forall x\in]-1,1[,\ (1-x^2)y''-xy'+y=0 \qquad (E)$$

On considère la fonction z par $z(t)=y(\sin t)$.
On dit en langage vulgaire que l'on fait le changement de variable $x=\sin t$.

1. Déterminer $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ les ensembles de définition et de dérivabilité de z.
   Déterminer l'équation $\left(E'\right)$ vérifiée par z.
2. Déterminer z puis y.

Exercice 15. [Correction] Soit $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue deux fois dérivables vérifiant l'équation différentielle

$$\begin{cases} f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ pour tout } x > 0 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que : pour tout $t > 0$, $t^2 f''(t) + f(t) = 0$.
2. On considère la fonction g définie par $g(u) = f\left(e^u\right)$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de g
   et montrer que g est solution d'une équation différentielle linéaire.
   (b) Déterminer g.
3. Déterminer f.

Exercice 16. On cherche à déterminer les fonctions deux fois dérivables vérifiant

$$f'(x) = 2f(-x) + x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \quad (E)$$

1. On considère l'équation différentielle (F) $y'' + 4y = 2x + 1$.
   (a) Résoudre l'équation différentielle homogène.
   (b) Déterminer une solution particulière de la forme $y_p : x \mapsto ax + b$
   (c) Donner les solution de (F).
2. Résolution de (E).
   Soit f une solution de (E).
   (a) Démontrer que f est solution de (F).
   (b) Pourquoi ne peut-on pas conclure ?
   (c) Démontrer que l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} + \lambda\left[\cos(2x) + \sin(2x)\right]$$

Principe-Processus de Cauchy.

Exercice 17. On veut que : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ e^{x+y} = e^x + e^y$

Montrer que les fonction $f : x \longmapsto e^{x+y}$ et $g : x \longmapsto e^x e^y$ vérifie le même 'processus de Cauchy'

$$y' - y = 0 \text{ et } y'(0) = e^y$$

Conclure

Exercice 18. Soit les fonction $f : x \mapsto \cos(x+a)$ et $g ; x \mapsto \cos(x)\cos(a) - \sin(x)\sin(a)$

1. Vérifier f est solution de l'équa diff $y'' = -y$. Calculer $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Vérifier g est solution de l'équa diff $y'' = -y$. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.
3. En déduire (à l'aide du principe de Cauchy) que : $\cos(x+a) = \cos(x)\cos(a) - \sin(x)\sin(a)$.

Exercice 19. [Correction] Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et h une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ continue et périodique de période $T > 0$
On étudie l'équation différentielle : (E) $y' + a\,y = h(x)$

1. Montrer que, si f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E),
   alors la fonction $g : x \longmapsto f(x+T)$ l'est aussi.
2. En déduire qu'une solution f est T-périodique si et seulement si $f(0) = f(T)$
3. Écrire toutes les solutions de l'équa diff (E).
   En déduire que l'équation (E) admet une unique solution T-périodique.

Correction.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. A faire
2. On résout sur $]0,+\infty[$

$$\begin{aligned}&\forall x>0,\ 2xy'-3y=\sqrt{x}\\&\iff y'-\frac{3}{2x}y=\frac{\sqrt{x}}{2x}\end{aligned}$$

$$\textit{Une primitive de } -\frac{3}{2x} \textit{ est } -\frac{3}{2}\ln|x|=-\frac{3}{2}\ln x$$

$$\begin{aligned}&\iff \left[y'-\frac{3}{2x}y\right]e^{-\frac{3}{2}\ln x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\frac{3}{2}\ln x}\\&\iff \left[y.e^{-\frac{3}{2}\ln x}\right]'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.e^{-\frac{3}{2}\ln x}=\frac{1}{2x^{-2}}\end{aligned}$$

Ainsi il existe une constante k telle que $x^{-\frac{3}{2}}y(x)=\frac{1}{2}\frac{x^{-1}}{(-1)}+k$

$$\text{Conclusion : pour } x>0,\quad y(x)=\left(-\frac{1}{2x}+k\right)x^{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2}\sqrt{x}+kx\sqrt{x}$$

3. On résout sur $]0,1[$

$$\begin{aligned}&\forall x\in]0,1[,\ x\,y'(x)+2y(x)=\frac{1}{1-x^2}\\&\iff y'(x)+\frac{2}{x}y(x)=\frac{1}{x(1-x^2)}\end{aligned}$$

$$\textit{Une primitive de } \frac{2}{x} \textit{ est } 2\ln|x|=2\ln x$$

$$\begin{aligned}&\iff \left(y'(x)+\frac{2}{x}y(x)\right)e^{2\ln x}=\frac{1}{x(1-x^2)}e^{2\ln x}\\&\iff \left[y(x)e^{2\ln x}\right]'e^{-2\ln x}=\frac{1}{x(1-x^2)}x^2\\&\iff \left[y(x)e^{2\ln x}\right]'=\frac{x}{(1-x^2)}=-\frac{x}{(x^2-1)}\end{aligned}$$

Ainsi $\forall x\in]0,1[,\ x^2y(x)=-\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+K=-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)+K$

$$\textbf{Conclusion}:\ \forall x\in]0,1[,\ y(x)=-\frac{1}{2}\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}+\frac{K}{x^2}$$

4. On résout sur $]0,\pi[$

> **Méthode classique.**

$$\forall x\in]0,\pi[,\ \sin(x)\,y'(x)-\cos(x)\,y(x)=1$$

$$\iff y'(x)-\frac{\cos x}{\sin x}y(x)=\frac{1}{\sin(x)}$$

$$\textit{Une primitive de } -\frac{\cos x}{\sin x} \textit{ est } -\ln|\sin(x)|=-\ln(\sin(x))$$

$$\iff \left[y'(x)-\frac{\cos x}{\sin x}y(x)\right]e^{-\ln\sin x}=\frac{1}{\sin(x)}e^{-\ln\sin x}$$

$$\iff \left[y(x)e^{-\ln\sin x}\right]'=\frac{1}{\sin^2(x)}$$

Après tout ces calculs, il y a un gros problème, c'est

$$\frac{1}{\sin^2 x} \overset{\text{Une Primitive}}{\rightsquigarrow} BOF$$

Remarque : une primitive de $\dfrac{1}{\sin^2(x)}$ est $-\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ donc on peut continuer.

> **Méthode astucieuse.**
On a

$$\forall x \in]0, \pi[, \ \sin(x)\, y'(x) + \cos(x)\, y(x) = 1 \iff \left[\sin(x)\, y(x)\right]' = 1$$

Ainsi il existe une constante k telle que : $\sin x . y \ = x + k$
$\iff \forall x \in]0, \pi[, \ y(x) * = \frac{x}{\sin(x)} + \frac{k}{\sin(x)}$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé) On doit avoir

$$f(x) = \frac{x+A}{1+x^2} = \underbrace{\frac{x}{1+x^2}}_{\textit{Sol particulière}} + \underbrace{\frac{A}{1+x^2}}_{\textit{Sol de l'eq Homogène}}$$

On commence par trouver l'équation homogène Comme $\left[\frac{1}{1+x^2}\right]' = 2x\frac{-1}{(1+x^2)^2}$

Ainsi l'équation homogène est : $(1+x^2)y' + 2xy = 0$

Puis trouve le second membre pour que $\frac{x}{1+x^2}$ soit une sol particulière

$$\text{On a : Second Membre } = (1+x^2)\left[\frac{x}{1+x^2}\right]' + 2x\frac{x}{1+x^2}$$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé) Les fonctions f sont des solutions de l'équation différentielle $y' + y = K$ où K est une constante, ainsi avec la théorie classique on trouve

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \lambda e^{-x} + K$$

De plus f soit effectivement une solution Ssi

$$\begin{aligned} K = f(0) + f(1) &= (\lambda e^{-0} + K) + (\lambda e^{-1} + K) \\ &\iff K = -(1+e^{-1})\lambda \end{aligned}$$

Conclusion : Les fonctions cherchées sont : $\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \lambda e^{-x} - (1+e^{-1})\lambda$

Solution de l'exercice 5 (Énoncé) On suppose que la fonction y est solution de l'équation différentielle

$$y' + y = x y^2.$$

Remarque : Il y a y^2 donc l'équation différentielle n'est pas linéaire et Donc le théories classiques ne s'appliquent pas.

1. On suppose que la fonction y ne s'annule pas sur $\mathfrak{D}$.
   On considère la fonction z définie par $z(x) = \dfrac{1}{y(x)}$.

   On a $z(x) = \dfrac{1}{y(x)}$

   comme la fonction y ne s'annule pas sur $\mathfrak{D}$

   La fonction z est bien définie et ne s'annule pas sur $\mathfrak{D}$

   $\Longrightarrow$ On a donc $y(x) = \dfrac{1}{z(x)}$ et
   $$\begin{aligned} y'(x) &= [y(x)]' \\ &= \left[\tfrac{1}{z(x)}\right]' \\ &= \tfrac{-z'(x)}{[z(x)]^2} \end{aligned}$$

   Conclusion : $y'(x) + y(x) = [y(x)]^2$

   On remplace $y(x)$ et $y'(x)$

   $$\Longrightarrow \frac{-z'(x)}{[z(x)]^2} + \frac{1}{z(x)} = \left[\frac{1}{z(x)}\right]^2$$

   $$\Longrightarrow -z'(x) + z(x) = 1$$

2. l'équation différentielle vérifiée par la fonction z est classique donc
   Avec la théorie classique s'applique, on déterminer la fonction z puis la fonction y.

Solution de l'exercice 6 (Énoncé) Soit f une fonction C^{∞} vérifiant

$$f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right) \quad \text{pour tout } x\in\mathbb{R} \text{ et } y\in\mathbb{R} \quad (E)$$

Pour une rédaction propre et claire, on utilisera la phrase

"J'applique l'égalié avec .....

1. J'applique l'égalité avec $x=0$ et $y=0$, ainsi

$$\begin{aligned} f\left(0+0\right) &= f\left(0\right)+f\left(0\right) \\ &\Longrightarrow f\left(0\right)=0 \end{aligned}$$

2. Pour la suite, on note $\alpha=f'\left(0\right)$.

   (a) je dérive l'égalité par rapport à x

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[\, f(x+y)\right] &= \frac{d}{dx}\left[f(x)+f(y)\right] \\ &\textit{Ainsi on a } 1.f'(x+y)=f'(x)+0 \end{aligned}$$

   J'applique l'égalité avec $x=0$ et $y=t$,

   ainsi on a $f'\left(t\right)=\alpha$.

   (b) On a maintenant

$$\begin{aligned} f'\left(t\right) &= \alpha \\ &\Longrightarrow \textit{Il existe k tel que } f(t)=\alpha\, t+k \end{aligned}$$

   Attention : on n'a pas trouver f mais seulement la forme "possible", CàD $f(x)=\alpha\, x+k$

   En effet on sait que $f(0)=0$ donc forcément $k=0$, CàD $f(x)=\alpha\, x$
   Enfin lorsque $f(x)=\alpha\, x$, on a
   $f(x+y)=\alpha\,(x+y)$ et $f(x)+f(y)=\alpha\, x+\alpha\, y$

Conclusion : les fonctions dérivable vérifiant (E)
Sont : $\forall\, t\in\mathbb{R},\ f\left(t\right)=\alpha t$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$

Solution de l'exercice 7 (Énoncé) Soit f une fonction C^∞ vérifiant

$$f(x+y) = f(x)f(y) \text{ pour tout } x\in\mathbb{R} \text{ et } y\in\mathbb{R} \quad (E)$$

Pour une rédaction propre et claire, on utilisera la phrase

"J'applique l'égalié avec .....

1. J'applique l'égalité avec $x=0$ et $y=0$

   $$\begin{aligned} \text{Ainsi on a } f(0) = & \quad f(0).f(0) = [f(0)]^2 \\ \Longleftrightarrow & \; f(0) - [f(0)]^2 = 0 \\ \Longleftrightarrow & \; f(0)[1-f(0)] = 0 \\ \Longleftrightarrow & \; f(0) = 0 \text{ ou } \; f(0) = 1 \end{aligned}$$

2. On suppose que $f(0) = 0$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$

   $$\boxed{\text{On veut montrer que } f(x) = 0}$$

   J'applique l'égalité avec $x = x$ et $y = 0$
   Ainsi on a $f(x) = f(x).f(0) = f(x).0 = 0$
   Conclusion : la fonction est constante égale à 0.

3. On suppose que $f(0) = 1$. Et on note $\alpha = f'(0)$.
   (a) Pour tout $y \in R$. On dérive l'égalité (E) par rapport à x

   $$\begin{aligned} \text{Ainsi on a } \frac{d}{dx}[f(x+y)] &= \frac{d}{dx}[f(x)f(y)] \\ &\Longrightarrow 1f'(x+y) = f'(x)f(y) \end{aligned}$$

   On a donc la nouvelle égalité $\forall x, y \in \mathbb{R},\; f'(x+y) = f'(x)f(y)$
   J'applique cette nouvelle égalité avec $x = 0$ et $y = t$

   $$\begin{aligned} \text{Ainsi on a} \quad f'(t) &= f'(0)f(t) = \alpha f(t) \\ &\Longrightarrow f'(t) - \alpha f(t) = 0 \end{aligned}$$

   (b) On résout l'équation différentielle $f'(t) - \alpha f(t) = 0$

   On trouve que $\forall t \in \mathbb{R},\; f(t) = Ke^{\alpha t}$

   (c) On sait que $f(0) = Ke^{\alpha 0} = 1$ donc forcément $K = 1$, CàD $f(x) = e^{\alpha x}$
   De plus, il est facile de vérifier que

   Lorsque $f(x) = e^{\alpha x}$, alors on a bien $f(x+y) = f(x).f(y)$

   Conclusion : les fonctions dérivable vérifiant (E)
   Sont : $\forall t \in \mathbb{R},\; f(t) = e^{\alpha t}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

Solution de l'exercice 12 (Énoncé) On suppose que la fonction y est solution de l'équation différentielle

$$x^2.y''(x) + 3x.y'(x) + y(x) = x^3.$$

1. L'équation est linéaire du 2-ième orcre **MAIS les coefficients ne sont pas constants**

   Donc le théories classiques ne s'appliquent pas.

2. On considère la fonction z définie par $z(t) = y(e^t)$.

   $$\begin{aligned} \text{On a } z(t) &= y(e^t). \\ \Rightarrow \quad \text{On a donc } z'(t) = [y(e^t)]' = e^t y'(e^t).\text{ et } z''(t) &= [y(e^t)]'' \\ &= [e^t.y'(e^t)]' \\ &= e^t.y'(e^t) + e^t.e^t.y''(e^t) \\ &= e^t.y'(e^t) + e^{2t}.y''(e^t) \end{aligned}$$

   On sait que $x^2.y''(x) + 3x.y'(x) + y(x) = x^3$.

→ J'applique cette égalité avec $x = e^t$, ainsi

$$\left(e^t\right)^2 .y''\left(e^t\right) + 3e^t .y'\left(e^t\right) + y\left(e^t\right) = \left(e^t\right)^3$$

$$\text{On a donc } \left[\underbrace{\left(e^t\right)^2 .y''\left(e^t\right) + 3e^t .y'\left(e^t\right)}_{\text{C'est } z''(t)}\right] + 2\left[\underbrace{e^t .y'\left(e^t\right)}_{\text{C'est } z'(t)}\right] + y\left(e^t\right) \quad = \quad e^{3t}$$

$$\boxed{\textbf{Conclusion} : \; z''(x) + 2z'(x) + z(t) = e^{3t}}$$

A noter : Les calculs ci dessus sont possibles SSi on peut écrire $x = e^t$ CàD si $x > 0$. Donc $\mathfrak{D} =]0, +\infty[$

Remarque : *l'équation différentielle vérifiée par la fonction z est classique.*

Solution de l'exercice 13 (Énoncé) Correction rapide

1. L'équation caractéristique $X^2+3X+2=0$ a pour racine $r=-1$ et $r=-2$, ainsi d'après la théories des équations différentielles, il existe λ,μ tel que
$$\forall\, x\in]0,+\infty[,\ y_h(x)=\lambda\, e^{-x}+\mu\, e^{-2x}$$
2. On cherche une solution particulière de l'équation complète de de la forme $y_p(x)=z(x)\,e^{-x}$.
On a $y_p(x)=z_p(x)\,e^{-x}$
$y'_p(x)=z'_p(x)\,e^{-x}-z_p(x)\,e^{-x}$
$y''_p(x)=z''_p(x)\,e^{-x}-2\,z'_p(x)\;e^{-x}+z_p(x)\,e^{-x}$
Ainsi
$$y''_p+3y'_p+2y_p=\frac{x-1}{x^2}e^{-x}$$
on replace
$$\iff \left[z''_p(x)\,e^{-x}-2\,z'_p(x)\;e^{-x}+z_p(x)\,e^{-x}\right]$$
$$+3\left[z'_p(x)\,e^{-x}-z_p(x)\,e^{-x}\right]+2\left[z_p(x)\,e^{-x}\right]=\frac{x-1}{x^2}e^{-x}$$
on factorise, on regroupe et on simplifie par $e^{-x}\neq 0$
$$\iff z''_p(x)+z'_p(x)=\frac{x-1}{x^2}$$
Donc z'_p est une solution d'une équation diff classique d'ordre 1 et on la résoutr avec la méthode classique
$$z''_p+z'_p=\frac{x-1}{x^2}$$
$$\iff \left[z'_p\,e^{x}\right]'=\frac{x-1}{x^2}e^{x}$$
Ainsi il existe k tel que $\left[z'_p\,e^{x}\right]=\dfrac{e^x}{x}+k$
On a donc : $\forall\, x>0,\ z'_p(x)=\dfrac{1}{x}+k\,e^{-x}$

Conclusion : $\forall\, x>0,\ z_p(x)=\ln|x|-k\,e^{-x}+m$ est une solution particulière.
3. Comme l'équation différentielle est linéaire, les solutions sont la somme
$>$ d'une solution particulière par exemple $y_p(x)=z_p(x)\,e^{-x}=\ln(x)\,e^{-x}$ je veux une sol part et je choisis $k=m=0$
$>$ des solutions de l'équation homogène.

Conclusion : Les solutions y de l'équation différentielle sont de la forme
$\forall\, x>0,\ y(x)=\ln(x)\,e^{-x}+\lambda\,e^{-x}+\mu\,e^{-2x}$ avec $k,m\in\mathbb{R}$

Solution de l'exercice 15 (Énoncé) Soit f une fonction de $]0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ continue deux fois dérivables vérifiant l'équation différentielle

$$\begin{cases} f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ pour tout } x > 0 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

1. On sait que $f'(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

   → On dérive cette égalité $[...]' = [...]'$,

   $$\text{Ainsi } f''(x) = \frac{-1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

   → On applique $f'(\square) = f\left(\dfrac{1}{\square}\right)$ avec $\square = \dfrac{1}{x}$

   $$\text{Ainsi } f'\left(\frac{1}{x}\right) = f(x), \text{ on a donc } f''(x) = \frac{-1}{x^2} f(x)$$

   On a bien $t^2 f''(t) + f(t) = 0$. $_{Fini}$ [rq les calculs sont valides sur l'intervalle $]0,+\infty[$]

2. On considère la fonction g définie par $g(u) = f(e^u)$.

   (a) On peut calculer le nombre $g(u)$ Ssi $e^u \in D_f =]0,+\infty[$ Donc pas de problème car $e^{\square}>0$.

   $$\text{Donc } g \text{ est def, } C^0 \text{ et même } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}$$

   (b) On a $g(u) = f(e^u)$

   On a donc

   $$\Rightarrow g'(u) = [f(e^u)]' = e^u f'(e^u) \text{ et } g''(u) = [e^u f'(e^u)]' = e^u f'(e^u) + (e^u)^2 f''(e^u)$$

   $$A\ g''(u) + B\ g'(u) + C\ g(u) = A\ \left(e^u f'(e^u) + (e^u)^2 f''(e^u)\right) + B\ e^u f'(e^u) + C\ f(e^u)$$

   $$= A\ (e^u)^2 f''(e^u) + (A+B)\ e^u f'(e^u)\ + C\ f(e^u)$$

   Je choisis $A = 1$ et $A + B = 0$ et $A = C$

   $$= (e^u)^2 f''(e^u) + \ f(e^u) = 0$$

   Car c'est l'équa diff de Q1 avec $t = e^u$.

   (c) La fonction g est solution de l'équation différentielle

   $$1\ g''(u) + (-1)\ g'(u) + 1\ g(u) = 0$$

   On sait la résoudre.

3. On sait que $f(e^u) = g(u)$, on applique avec $u = \ln x$ ainsi

   $$f(x) = g(\ln x)$$

   → **Attention** : *Comme la résolution est longue, on a surement fait des ⇒ donc il faut vérifier parmi les solutions trouvées, celles qui effectivement vérifient* $f'(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *et* $f(1) = 1$

Solution de l'exercice 19 (Énoncé)

1. ok
2. ok
3. Les sol de (E) $y' + a\,y = h(x)$ sont la somme ....

   On a donc $\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = f(x) + K\,e^{-ax}$

   La fonction y est périodique Ssi $y(0) = y(T)$

   Ssi $f(0) + K = f(T) + KJ\,e^{-aT}$ Ssi $T = ...$

   Conclusion : l'équation (E) admet une unique solution T-périodique