TD 7 Trigo et suite classique.

Jeudi 10 Octobre 2024.

Trigo et Arc-Trigo

Exercice 1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

Simplifier $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Exercice 2. [Correction] Soit $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. On considère $P_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \cos\left(\dfrac{\pi}{2^k}\right)$.

1. Simplifier $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}$. En déduire que : $\forall\, n \geqslant 2,\ P_n = \dfrac{1}{2^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$
2. On admet que $\lim\limits_{\square \to 0} \dfrac{\sin(\square)}{\square}$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n$.

Exercice 3. [Correction] On considère la fonction $h : x \longmapsto \arcsin(x) + \arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right)$

1. Déterminer $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.
2. Calculer et simplifier h'
3. En déduire une expression simplifiée de $h(x)$

Suite classique d'ordre 2

Exercice 4. [Correction]

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par récurrence qu'il existe **deux entiers** a_n et b_n tels que
$$\left(2+\sqrt{3}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{3}.$$
   On exprimera a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
   Calculer a_0, b_0, et a_1, b_1.
2. Montrer que la suite (a_n) vérifie une relation de récurrence d'ordre 2.
   En déduire a_n en fonction de n.
3. Montrer que $\forall n,\ \ a_n^2 - 3b_n^2 = 1$.
   En déduire qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\left(2+\sqrt{3}\right)^n = \sqrt{N_0} + \sqrt{N_0 - 1}$

Exercice 5. [Correction] On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2,\ u_1 = 6$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 4u_n$

1. Démontrer que le nombre u_n est un entier pair.
2. Calculer le nombre u_n en fonction de n.
3. Montrer (sans faire d'approximation numérique) que . On a donc $\left(3-\sqrt{5}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
4. *On admet que :* $0 < 3-\sqrt{5} < 1$, *ainsi On a donc* $\left(3-\sqrt{5}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

   En déduire que : $\sin\left[\left(3+\sqrt{5}\right)^n \pi\right] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

   Méthodologie : Il faut faire le lien entre $\left(3+\sqrt{5}\right)^n \pi$ et ce qui précède
   Avec Q2, on a $\left(3+\sqrt{5}\right)^n$ est lié à ...
   On remplace. Avec Q1 , on peut gérer ....
   On calcule sachant que la fonction Sinus est 2π-périodique. Enfin avec Q3, fini

Complexe

Exercice 6. [Correction] Soit $\omega = \exp\left(i\dfrac{2\pi}{11}\right)$ donc ω est la racine 11-ième fondamentale de l'unité.
On considère les complexes

$$S = \omega + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^9 \quad \text{Et} \quad T = \omega^2 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^{10}$$

1. Autour de ω

   > Calculer ω^{11}. Placer dans le plan complexe, les complexes : $\omega,\ \omega^2,\ \omega^3, ...,\ \omega^{10}$.

   > En déduire que : $\overline{S} = T$ et Im$S > 0$

2. Somme/produit.
   (a) Calculer $S + T$ et vérifier que : $S.T = 3$ Le calcul de $S.T$ est un peu lourd. Admettre ?
   (b) En déduire la valeur de S et de T.

3. Calculs intermédiaires.
   (a) Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \left(-\omega^3\right)^k = -i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right)$
   (b) Montrer que : $\omega - \omega^{10} = 2i\sin\left(\dfrac{2\pi}{11}\right)$

4. En utilisant Q4a. et Q4b., exprimer $\tan\left(\dfrac{3\pi}{11}\right) + 4\sin\left(\dfrac{2\pi}{11}\right)$ en fonction de T et S, puis vérifier que

$$\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) + 4\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = \sqrt{11}$$

Amusant

Exercice 7. [Correction] Soit f une fonction de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad f(n) + f(f(n)) = 2n$
Avant de commencer, faisons quelques remarques, utile.

> Comme la fonction f est à valeurs dans $\mathbb{N}$,
> on a forcément $f(\square)$ est un entier$\geqslant 0$.

> L'égalité $f(n) + f(f(n)) = 2n$ doit se comprendre $f(\square) + f(f(\square)) = 2\square$
> De plus, pour utiliser cette égalité, il faut d'écrire la phrase
> J'applique l'égalité avec $\square = ...$, ainsi on a

> Comme f est une fonction, on sait que : Lorsque $n = 2$ alors $f(n) = f(2)$
> *mais attention à priori la réciproque est fausse.*

1. Généralités.
   (a) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant f(n) \leqslant 2n$.
   (b) Calculer $f(0)$.
   (c) Justifier que $f(1)$ est égale à $0, 1$ ou 2.
   → On suppose que $f(1) = 0$.
   Trouver une absurdité.
   → On suppose que $f(1) = 2$.
   Trouver une absurdité.
   → Conclure.

2. Montrer que : $\forall\, n, m \in \mathbb{N},\ f(n) = f(m) \implies n = m$.

3. Soit n un entier.
   On suppose que $f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(2) = 2, ...,f(n) = n$
   (a) Avec un R.A. et en utilisant Q.2., montrer que : Si $p \geqslant n+1$ alors $f(p) \geqslant n+1$.
   (b) On suppose que $f(n+1) \underset{\text{Strict}}{>} n+1$.
   Montrer, en utilisant $f(\square) + f(f(\square)) = 2\square$ et 3a, que c'est absurde.
   (c) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f(n) = n$.

Correction.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. Récurrence
2. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \dfrac{1}{\infty \sin(0)}$, c'est une FI avec $\sin(0)$ donc va utiliser l'approximation linéaire.

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n+1}[\square + o(\square)]}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\dfrac{\pi}{2} + o\left(\dfrac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé) calcul et simplification de f'

On a

$$\forall\, x \in \mathscr{D}', \quad f'(x) = \frac{d}{dx}[\arcsin'(x)] + \frac{d}{dx}[\arcsin\sqrt{1-x^2}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \left[\sqrt{1-x^2}\right]' \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + (-2x)\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{x}{\sqrt{x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[1 - \frac{x}{|x|}\right]$$

On discute selon le signe de x.

$$\begin{cases} Si\ x & \in \mathscr{D}' \text{ et } x > 0,\ alors\ |x| = +x\ et \quad f'(x) = 0 \\ Si\ x & \in \mathscr{D}' \text{ et } x < 0,,\ alors\ |x| = -x\ et \quad f'(x) = 2\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2\arcsin'(x) \end{cases}$$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

1. On démontre par récurrence

$$H\langle n\rangle : \left| \text{Il existe deux entiers } a_n \text{ et } b_n \text{tels que } \left(2+\sqrt{3}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{3}. \right.$$

Initialisation

On a $(2+\sqrt{3})^0 = 1$ je choisis $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$

Hérédité Je suppose que $H_{<n>}$ est vrai.

$$\boxed{\text{On veut trouver } a_{n+1} \text{ et } b_{n+1} \text{ entier tel que } \left(2+\sqrt{3}\right)^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{3}}$$

On veut avoir

$$\begin{aligned}\left(2+\sqrt{3}\right)^{n+1} &= \left(2+\sqrt{3}\right)^n\left(2+\sqrt{3}\right)\\ &\text{On utilise } H\langle n\rangle\\ &= \left(a_n + b_n\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)\\ \\ &= [2a_n + 3b_n] + \sqrt{3}\,[a_n + 2b_n]\end{aligned}$$

Je choisis $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n$ et $b_{n+1} = a_n + 2b_n$ et ce sont bien des entiers ! ! !

De plus

$\left(2+\sqrt{3}\right)^0 = 1 \Rightarrow a_0 = 1$ et $b_0 = 0$

$\left(2+\sqrt{3}\right)^1 = 2+\sqrt{3} \Rightarrow a_1 = 2$ et $b_1 = 1$

2. On sait que $b_{n+1} = a_n + 2b_n$. On va utiliser l'autre relation de récurrence pour calculer b_n est b_{n+1} en fonction des termes de la suite (a_n)

$$\begin{gathered}a_{n+1} = 2a_n + 3b_n \Rightarrow b_n = \ldots\\ \text{et}\\ a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3b_{n+1} \Rightarrow b_{n+1} = \ldots\end{gathered}$$

L'égalité $b_{n+1} = a_n + 2b_n$ devient (après simplification) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n = 0.$

3. La suite (a_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Équation caractéristique.

On doit résoudre $X^2 - 4X + 1 = 0.$
Après calcul,on trouve que : Les racines sont $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$.

On sait d'après la théorie des suites, qu'il existe 2 scalaires λ et μ tq

$$a_n = \lambda\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \mu\left(2-\sqrt{3}\right)^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On a sait de plus que

$$\left.\begin{aligned}a_0 = 1 &\Rightarrow \lambda + \mu = 1\\ a_1 = 2 &\Rightarrow \lambda\left(2+\sqrt{3}\right) + \mu\left(2-\sqrt{3}\right) = 2\end{aligned}\right\} \text{ ainsi } \lambda = \mu = \tfrac{1}{2}$$

$$\text{Conclusion : } a_n = \frac{1}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \frac{1}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

4. On fait par récurrence (1 étage) : $H_{<n>} : (a_n)^2 - 3(b_n)^2 = 1.$
On en déduit que

$$\begin{aligned}\left(2+\sqrt{3}\right)^n &= a_n + b_n\sqrt{3}\\ &\text{Or } a_n, b_n \text{ sont } > 0\\ &= \sqrt{(a_n)^2} + \sqrt{3\,(b_n)^2}\\ &\text{Or } (a_n)^2 - 3(b_n)^2 = 1\\ &= \sqrt{(a_n)^2} + \sqrt{(a_n)^2 - 1}\\ &= \sqrt{N_0} + \sqrt{N_0 - 1} \quad \text{avec } N_0 = (a_n)^2\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5 **(Énoncé)** On considère la suite $(u_{\square})$ définie par

$$u_0 = 2,\ u_1 = 6 \text{ et } u_{n+2} = 6u_{n+1} - 4u_n$$

1. On fait une récurrence.
2. C'est une suite récurrente d'ordre 2 classique

$$\text{A la fin, on trouve que} \quad u_n = \left(3+\sqrt{5}\right)^n + \left(3-\sqrt{5}\right)^n$$

3. On y va direct

$$3-\sqrt{5} = \frac{(3)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2}{3+\sqrt{5}} = \frac{9-5}{3+\sqrt{5}} > 0$$
$$\text{ET}$$
$$1-\left(3-\sqrt{5}\right) = \sqrt{5}-2 = \frac{5-4}{\sqrt{5}+2} > 0$$
$$\text{Conclusion : On a bien } 0 < 3-\sqrt{5} < 1$$

4. On a le cheminement naturel (**CàD qui suit les indications qui sont assez naturelles**)

$$\begin{aligned}
\sin\left[\left(3+\sqrt{5}\right)^n \pi\right] &= \sin\left[\left(u_n - \left(3-\sqrt{5}\right)^n\right)\pi\right] \\
&= \sin\left[u_n\pi - \left(3-\sqrt{5}\right)^n \pi\right] \\
&\text{Or } u_n \text{ est un nombre pair} \\
&\text{donc on peut écrire} \quad u_n = 2k \\
&= \sin\left[2k\pi - \left(3-\sqrt{5}\right)^n \pi\right] \\
&\text{Or la fonction Sinus est } 2\pi-\text{périodique} \\
&\text{Donc} \\
&= \sin\left[-\left(3-\sqrt{5}\right)^n \pi\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ car } -\left(3-\sqrt{5}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 6 **(Énoncé)** Soit $\omega = \exp\left(i\dfrac{2\pi}{11}\right)$.

On considère les complexes

$$S = \omega + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^9 \text{ Et } T = \omega^2 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^{10}$$

1. On a
   - $\rightarrow$ Tout d'abord on a le dessin d'un gâteaux divisé en 11 parts égales.
   - $\rightarrow$ C'est marqué dessus, les Racines 11-ième de l'unité vérifient $\omega^{11} = 1$.
   - $\rightarrow$ Enfin on sait que $1 + \omega_1 + \omega_2 + ... + \omega_{10} = 0$.
2. On fait un bô dessin et on devine que

   $$\overline{S} = T \quad \text{et} \quad \mathrm{Im} S > 0$$

   - $\rightarrow$ Rappel : $\overline{S}$ est le conjugué de S et ImS est la partie imaginaire de S
3. Montrer $S + T = -1$ et $S.T = 3$.

   $$\begin{aligned} S + T &= \omega_1 + \omega_2 + ... + \omega_{10} = -1 + (1 + \omega_1 + \omega_2 + ... + \omega_{10}) = -1 \\ S.T &= \left(\omega + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^9\right)\left(\omega^2 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^{10}\right) \\ &= \text{On fait le méga développement} \\ &= \text{On simplifie avec } \omega^{11} = 1 \text{ donc } \omega^{12} = \omega^{11+1} = \omega \\ &= \text{On trouve au final } = 5 - 2(\omega_1 + \omega_2 + ... + \omega_{10}) = 5 - 2 = 3 \end{aligned}$$

   - $\rightarrow$ On trouve facilement (par substitution) $S^2 + S + 3 = 0$

     On a donc 2 solutions possibles $S_1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i\sqrt{11}$ et $S_2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i\sqrt{11}$

     Or Im$S > 0$ donc

     $$S = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{11} \text{ et } T = \overline{S} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{11}$$

4. On a

   $$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10}\left(-\omega^3\right)^k &= \sum_{k=0}^{10}(\square)^k - \underbrace{1}_{k=0} \qquad \textit{avec } \square = -\omega^3 \\ &= \frac{1 - \square^{11}}{1 - \square} - 1 \\ &= \frac{\square - \square^{11}}{1 - \square} \\ &= \square\frac{1 - \square^{10}}{1 - \square} \\ &= \left(-\omega^3\right)\frac{1 - \omega^{30}}{1 + \omega^3} \\ &= \left(-\omega^3\right)\frac{1 - \omega^{-3}}{1 + \omega^3} \end{aligned}$$

   Argument moitié

   $$= -\omega^3\frac{\omega^{-3/2}\left(\omega^{3/2} - \omega^{-3/2}\right)}{\omega^{3/2}\left(\omega^{-3/2} + \omega^{3/2}\right)} = -\frac{2i\sin\left(3\frac{2\pi}{2.11}\right)}{2\cos\left(3\frac{2\pi}{2.11}\right)} = -i\tan\left(3\frac{\pi}{11}\right)$$

   $$\omega - \omega^{10} = \omega - \overline{\omega} = e^{i\frac{2\pi}{11}} - e^{-i\frac{2\pi}{11}} = 2i\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)$$

   On a donc

   $$\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) + 4\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = i\sum_{k=1}^{10}\left(-\omega^3\right)^k - 2i\left(\omega - \omega^{10}\right)$$

   On détaille la somme

   $$= i\left[-\omega^3 + \omega^6 - \omega^9 + \omega - \omega^4 + \omega^7 - \omega^{10} + \omega^2 - \omega^5 + \omega^8\right] - 2i\left(\omega - \omega^{10}\right)$$

   On factorise i et on reconnait S et T

   $$\begin{aligned} &= i\left[T - S\right] \\ &= i\left[\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{11}\right) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{11}\right)\right] \\ &= i\left[-i\sqrt{11}\right] = \sqrt{11} \quad \text{Yes.} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 7 (Énoncé)

1. Généralités.

   (a) On suppose que $n \in \mathbb{N}$.

   $$\boxed{\text{On veut montrer que } \ 0 \leqslant f(n) \leqslant 2n}$$

   Comme l'énoncé le fait remarqué, on sait que $n = f(\square) \geqslant 0$.
   J'applique l'égalité avec n ainsi

   $$\begin{aligned} & f(n) + f(f(n)) = 2n \\ & \qquad \Longrightarrow \ f(n) \ \begin{aligned}[t] &= 2n - f((f(n))) \\ &= 2n - f(\square) \end{aligned} \end{aligned}$$

   Pour majore A-B, on .....
   On a donc $f(n) \leqslant 2n - 0 = 2n$ Fini

   (b) J'applique l'égalité précédente avec $n = 0$,

   $$\begin{aligned} & \text{Ainsi on a } \ 0 \leqslant f(0) \leqslant 2 \times 0 \\ & \qquad \Longrightarrow \ \text{On a donc } f(0) = 0 \end{aligned}$$

   (c) J'applique légalité précédente avec $n = 1$

   $$\begin{aligned} & \text{Ainsi on a } \ 0 \leqslant f(1) \leqslant 2 \\ & \qquad \text{De plus on sait que } \ f(1) \in \mathbb{N} \\ & \qquad \Longrightarrow \ \text{On a donc } f(1) = 0, 1 \text{ ou } 2 \end{aligned}$$

   $\rightarrow$ On suppose que $f(1) = 0$.
   J'applique l'égalité (initiale) avec $n = 1$,

   $$\begin{aligned} & \text{Ainsi } \ f(1) + f(f(1)) = 2 \times 1 = 2 \\ & \qquad \Longleftrightarrow \ f(1) + f(0) = 2 \\ & \qquad \text{Or on sait que } \ f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 0 \\ & \qquad \Longleftrightarrow \ 0 = 2 \quad \text{OUPS, c'est absurde} \end{aligned}$$

   Donc l'hypothèse $f(1) = 0$ est fausse

   $\rightarrow$ On suppose que $f(1) = 2$.
   J'applique l'égalité (initiale) avec $n = 1$,

   $$\begin{aligned} & \text{Ainsi } \ f(1) + f(f(1)) = 2.1 = 2 \\ & \qquad \Longleftrightarrow \ f(1) + f(2) = 2 \\ & \qquad \text{Or on sait que } \ f(1) = 2 \\ & \qquad \Longleftrightarrow \ f(2) = 0 \end{aligned}$$

   J'applique maintenant l'égalité (initiale) avec $n = 2$,

   $$\begin{aligned} & \text{Ainsi } \ f(2) + f(f(2)) = 2.2 = 4 \\ & \qquad \Longleftrightarrow \ f(2) + f(0) = 4 \\ & \qquad \text{Or on sait que } \ f(2) = 0 \text{ et } f(0) = 0 \\ & \qquad \Longleftrightarrow \ 0 = 4 \ \text{ OUPS, c'est absurde} \end{aligned}$$

   Donc l'hypothèse $f(1) = 2$ est fausse.

   Conclusion : $f(1) = 1$.

2. Soit n et m deux entiers. On suppose que $f(n) = f(m)$

$$\boxed{\text{On va montrer que : } n = m.}$$

Comme $f(n) = f(m)$, on a $f(G) = f(D)$, CàD $f\left(f(n)\right) = f\left(f(m)\right)$.

Ainsi $\underbrace{f(n) + f\left(f(n)\right)}_{2n} = \underbrace{f(m) + f\left(f(m)\right)}_{=2m}$

$\Longrightarrow n = m$ Fini

3. Soit n un entier.
On suppose que $f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(2) = 2, \ldots.., f(n) = n$

(a) On va faire un R.A (Raisonnement par l'absurde)
On suppose que $p \geqslant n+1$ et que $f(p) \underset{\text{stric}}{<} n+1$.

$\to$ Comme $f(p)$ est un entier et que $0 \leqslant f(p) \underset{\text{stric}}{<} n+1$,

Alors forcément on a $f(p) = k \in \{0, 1, ..., n\}$

On sait de plus que comme $k \in \{0, 1, ..., n\}$ que $f(k) = k$

Ainsi on a $f(p) = k = f(k)$

$\Longrightarrow p = k$ (A cause de Q 2)

C'est absurde car $p \geqslant n+1$ et $n \geqslant k = p$

(b) On suppose que $f(n+1) \underset{\text{Strict}}{>} n+1$. On note $p = f(n+1)$
J'applique l'égalité (initiale) avec $n+1$,

Ainsi $f(n+1) + f\left(f(n+1)\right) = 2.(n+1) = 2n+2$

$\Longleftrightarrow p + f(p) = 2(n+1)$

$\Longrightarrow f(p) = 2n+2-p$

Or pour majorer A-B, on .....et on sait que $p = f(n+1) \underset{\text{Strict}}{>} n+1$

On a donc $f(p) \underset{Stric}{<} 2n+2-(n+1) = n+1$

On a pour finir $f(p) \underset{Stric}{<} n+1$ et $f(p) \geqslant p = f(n+1) \underset{\text{Strict}}{>} n+1$

OUPS c'est absurde. Donc l'hypothèse $f(n+1) \underset{\text{Strict}}{>} n+1$ est fausse.

Conclusion : $f(n+1) = n+1$

(c) On vient de faire l'hérédité d'une récurrence forte. On a donc démontrer que

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(n) = n$.