TD 9 Racine n-ième et Équation Différentielle. Jeudi 07 Novembre 2024.

Faire dans cette ordre.

Exo 1 puis Exo 3 puis Exo 4 puis Exo2 puis .....

Complexe

Exercice 1. [Correction] On considère l'équation : $(1+iz)^5 = (1-iz)^5$

1. Résoudre l'équation comme en terminale.
2. Résoudre avec les racines de l'unité
   Au final, on trouve les 5 racines $z_k = \tan\left(k\dfrac{\pi}{5}\right)$ avec $k \in \{0, 1, ..4\}$.
3. Déterminer la valeur de $\tan\dfrac{\pi}{5}$.

Exercice 2. [Correction] Soit $\omega = \exp\left(i\dfrac{2\pi}{11}\right)$ donc ω est la racine 11-ième fondamentale de l'unité.
On considère les complexes

$$S = \omega + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^9 \quad \text{Et} \quad T = \omega^2 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^{10}$$

1. Autour de ω
   $>$ Calculer ω^{11}. Placer dans le plan complexe, les complexes : $\omega,\ \omega^2,\ \omega^3, ...,\ \omega^{10}$.
   $>$ En déduire que : $\overline{S} = T$ et Im$S > 0$
2. Somme/produit.
   (a) Calculer $S + T$ et vérifier que : $S.T = 3$ Le calcul de $S.T$ est un peu lourd. Admettre ?
   (b) En déduire la valeur de S et de T.
3. Calculs intermédiaires.
   (a) Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \left(-\omega^3\right)^k = -i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right)$
   (b) Montrer que : $\omega - \omega^{10} = 2i\sin\left(\dfrac{2\pi}{11}\right)$
4. En utilisant Q4a. et Q4b., exprimer $\tan\left(\dfrac{3\pi}{11}\right) + 4\sin\left(\dfrac{2\pi}{11}\right)$ en fonction de T et S, puis vérifier que

$$\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) + 4\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = \sqrt{11}$$

——— Équations différentielles ———

Exercice 3. Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle, $2xy' - 3y = \sqrt{x}$.

Exercice 4. [Correction] Soit f une fonction dérivable sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ et vérifiant la relation

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(y)\, f(x) \quad (E)$$

1. Calculer le valeurs possible de $f(0)$.
2. On suppose que : $f(0) = 0$
   Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$.
3. On suppose que $f(0) = 1$
   (a) Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$
   (b) Démontrer qu'il existe α tel que $\forall\, t \in \mathbb{R},\ f'(t) - \alpha f(t) = 0$
   (c) Déterminer f, CàD calculer $f(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.
   (d) Trouver parmi les solutions de l'équation différentielle, les fonctions f qui sont solutions du problème.
4. Facultatif On suppose que f est seulement continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie la relation (E)
   Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet des primitives. On note H l'une d'elle.
   En primitivation E, montrer que la fonction f est dérivable.

Exercice 5. [Correction] On considère l'équation différentielle (E) : $|x|\, y' + (x-1)y = x^3$

1. On se place sur $]-\infty, 0[$
   (a) Vérifier que $\left[x \longmapsto x^2 + 3x + 6 + \dfrac{6}{x}\right]$ est une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$.
   (b) Résoudre, sur $\mathbb{R}_-^*$, l'équation homogène.
   (c) Donner, sur $\mathbb{R}_-^*$, les solutions de l'équation complète.
2. On se place sur $]0,+\infty[$
   (a) Chercher,sur $\mathbb{R}_+^*$, une solution particulière de (E) polynômiale de degré 2.
   (b) Résoudre, sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation homogène.
   (c) Donner, sur $\mathbb{R}_+^*$, les solutions de l'équation complète.

Exercice 6. [Correction] On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) .

$$y' + y - y^2 = 0 \qquad (E)$$

On suppose que la fonction y est une solution de (E) et on suppose que la fonction y ne s'annule pas.
On considère sur $\mathbb{R}$ la fonction z par la formule

$$z(x) = \frac{1}{y(x)}$$

1. Déterminer l'équation (E') vérifiée par la fonction z.
2. Déterminer $z(x)$ puis $y(x)$.

Exercice 7. [Correction] Soit $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue deux fois dérivables vérifiant l'équation différentielle

$$f'(x) = f\left(\tfrac{1}{x}\right) \text{ pour tout } x > 0 \quad \textit{et} \quad f(1) = 1$$

1. Montrer que : pour tout $t > 0,\ \ t^2 f''(t) + f(t) = 0$.
2. On considère la fonction g définie par $g(u) = f(e^u)$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de g
   et montrer que g est solution de l'équation différentielle $g'' - g' + g = 0$.
   (b) Déterminer g.
3. Déterminer f.

Correction.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé) Calcul de $\tan\dfrac{\pi}{5}$, $\tan\dfrac{2\pi}{5}$.

On considère l'équation
$$(1+iz)^5 = (1-iz)^5 \quad (E)$$

1. D'une part
   (a) Combien y a-t-il de solution d'une équation polynômiale ?
   $$\text{On a} \quad (E) \Leftrightarrow (1+iz)^5 - (1-iz)^5 = 0$$
   On a
   Tout d'abord
   $$(1+iz)^5 = iz^5 + 5z^4 - 10iz^3 - 10z^2 + 5iz + 1$$
   $$(1-iz)^5 = -iz^5 + 5z^4 + 10iz^3 - 10z^2 - 5iz + 1$$
   $\Longrightarrow$ Ainsi
   $$\begin{aligned}(E) &\iff (1+iz)^5 - (1-iz)^5 = 0 \\ &\iff \big(iz^5 + 5z^4 - 10iz^3 - 10z^2 + 5iz + 1\big) \\ &\qquad - \big(-iz^5 + 5z^4 + 10iz^3 - 10z^2 - 5iz + 1\big) = 0 \\ &\iff 2iz^5 - 20iz^3 + 10iz = 2 \\ &\iff 2iz\left(z^4 - 10z^2 + 5\right) = 0\end{aligned}$$
   Donc l'équation est polynômiale de degré 5, il y a 5 racines dans $\mathbb{C}$.

   (b) On résout l'équation dans $\mathbb{C}$
   $$\begin{aligned}(E) &\iff 2iz\left(z^4 - 10z^2 + 5\right) = 0 = 0 \\ &\iff [z=0] \text{ ou } \left[z^4 - 10z^2 + 5 = 0\right]\end{aligned}$$
   $\Longrightarrow$ On résout (B)
   $$\begin{aligned}&z^4 - 10z^2 + 5 = 0 \\ &\iff \begin{cases} U^2 - 10U + 5 = 0 \\ \\ \text{et } z^2 = U \end{cases} \Leftrightarrow \ldots\end{aligned}$$
   Conclusion : Il y a 5 racines $0,\ \sqrt{5-2\sqrt{5}},\ -\sqrt{5-2\sqrt{5}},\ \sqrt{2\sqrt{5}+5},\ -\sqrt{2\sqrt{5}+5}$

2. D'autre part.
   Avec les racines 5-ième, on trouve les 5 racines : $0, \tan\dfrac{\pi}{5}, \tan\dfrac{2\pi}{5}, \tan\dfrac{3\pi}{5}, \tan\dfrac{4\pi}{5}$

3. Il faut identifier **Mais qui est qui !!!!**
   On sait que
   $$-\sqrt{2\sqrt{5}+5} < -\sqrt{5-2\sqrt{5}} < 0 < \sqrt{5-2\sqrt{5}}, < \sqrt{2\sqrt{5}+5},$$
   Avec le graphe de tangente, on a
   $$\tan\frac{3\pi}{5} < \tan\frac{4\pi}{5} < 0 < \tan\frac{\pi}{5} < \tan\frac{2\pi}{5}$$
   On a donc $\tan\dfrac{\pi}{5} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$ et $\tan\dfrac{2\pi}{5} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé) Soit $\omega = \exp\left(i\dfrac{2\pi}{11}\right)$.

On considère les complexes

$$S = \omega + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^9 \ \text{ Et } \ T = \omega^2 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^{10}$$

1. On a
   - $\rightarrow$ Tout d'abord on a le dessin d'un gâteaux divisé en 11 parts égales.
   - $\rightarrow$ C'est marqué dessus, les Racines 11-ième de l'unité vérifient $\omega^{11} = 1$.
   - $\rightarrow$ Enfin on sait que $1 + \omega_1 + \omega_2 + ... + \omega_{10} = 0$.
2. On fait un bô dessin et on devine que
$$\overline{S} = T \quad \text{et} \quad \text{Im}S > 0$$
   - $\rightarrow$ Rappel : $\overline{S}$ est le conjugué de S et ImS est la partie imaginaire de S
3. Montrer $S + T = -1$ et $S.T = 3$.
$$S + T = \omega_1 + \omega_2 + ... + \omega_{10} = -1 + (1 + \omega_1 + \omega_2 + ... + \omega_{10}) = -1$$
$$\begin{aligned} S.T &= \left(\omega + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^9\right)\left(\omega^2 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^{10}\right) \\ &= \text{On fait le méga développement} \\ &= \text{On simplifie avec } \omega^{11} = 1 \ \text{ donc } \omega^{12} = \omega^{11+1} = \omega \\ &= \text{On trouve au final} = 5 - 2\left(\omega_1 + \omega_2 + ... + \omega_{10}\right) = 5 - 2 = 3 \end{aligned}$$
   - $\rightarrow$ On trouve facilement (par substitution) $S^2 + S + 3 = 0$

     On a donc 2 solutions possibles $S_1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i\sqrt{11}$ et $S_2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i\sqrt{11}$

     Or Im$S > 0$ donc
$$S = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{11} \ \text{ et } \ T = \overline{S} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{11}$$
4. On a
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10}\left(-\omega^3\right)^k &= \sum_{k=0}^{10}(\square)^k - \underbrace{1}_{k=0} \qquad \textit{avec } \square = -\omega^3 \\ &= \frac{1 - \square^{11}}{1 - \square} - 1 \\ &= \frac{\square - \square^{11}}{1 - \square} \\ &= \square\frac{1 - \square^{10}}{1 - \square} \\ &= \left(-\omega^3\right)\frac{1 - \omega^{30}}{1 + \omega^3} \\ &= \left(-\omega^3\right)\frac{1 - \omega^{-3}}{1 + \omega^3} \end{aligned}$$
   Argument moitié
$$= -\omega^3\frac{\omega^{-3/2}\left(\omega^{3/2} - \omega^{-3/2}\right)}{\omega^{3/2}\left(\omega^{-3/2} + \omega^{3/2}\right)} = -\frac{2i\sin\left(3\frac{2\pi}{2.11}\right)}{2\cos\left(3\frac{2\pi}{2.11}\right)} = -i\tan\left(3\frac{\pi}{11}\right)$$
$$\omega - \omega^{10} = \omega - \overline{\omega} = e^{i\frac{2\pi}{11}} - e^{-i\frac{2\pi}{11}} = 2i\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)$$
   On a donc
$$\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) + 4\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = i\sum_{k=1}^{10}\left(-\omega^3\right)^k - 2i\left(\omega - \omega^{10}\right)$$
   On détaille la somme
$$= i\left[-\omega^3 + \omega^6 - \omega^9 + \omega - \omega^4 + \omega^7 - \omega^{10} + \omega^2 - \omega^5 + \omega^8\right] - 2i\left(\omega - \omega^{10}\right)$$
   On factorise i et on reconnait S et T
$$\begin{aligned} &= i\,[T - S] \\ &= i\left[\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{11}\right) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{11}\right)\right] \\ &= i\left[-i\sqrt{11}\right] = \sqrt{11} \quad \text{Yes.} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4 **(Énoncé)**

1. J'applique (E) avec $x=0$ et $y=0$

   Ainsi $f(0)=f(0)f(0) \iff f(0)\,[1-f(0)]=0$

   Conclusion : On a $f(0)=0$ ou $f(0)=1$

2. On suppose que : $f(0)=0$

   Pour tout $t\in\mathbb{R}$. J'applique (E) avec $x=t$ et $y=0$

   Ainsi $f(t)=f(t)f(0)=0$

   Conclusion : Lorsque $f(0)=0$, alors f est la fonction nulle, CàD $\forall\, t\in\mathbb{R},\ f(t)=0$.

3. On suppose que $f(0)=1$

   (a) Pour tout $t\in\mathbb{R}$. J'applique (E) avec $x={}^{t}/_{2}$ et $y={}^{t}/_{2}$

   Ainsi $f(t)=f\left({}^{t}/_{2}\right)f\left({}^{t}/_{2}\right)=\square^2\geqslant 0$.

   (b) Pour tout $y\in\mathbb{R}$, On dérive (E) par rapport à x

   Ainsi $\dfrac{d}{dx}\left[f(x+y)\right]=\dfrac{d}{dx}\left[f(x)\,f(y)\right]$

   Donc $\forall\, x,y1f'(x+y)=f(y)f'(x)$

   J'applique cette égalité avec $x=0$ et $y=t$, ainsi $f'(t)=f(t)f'(0)$

   Conclusion : la fonction f est solution de l'équa diff $y'-a\,y=0$ avec $a=f'(0)$

   (c) On résout l'EDL1 homogène et on trouve que : $\forall\, t\in\mathbb{R},\ f(t)=K\,e^{at}$

   De plus on sait que $f(0)=1$ donc forcément $K=0$

   Conclusion : Si f vérifient (E) et $f(0)=1$

   Alors forcément il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que $\forall\, t\in\mathbb{R},\ f(t)=e^{at}$

   (d) *Ce qu'on a fait précédemment c'est la fin de l'analyse.*

   On va maintenant faire la synthèse, CàD vérifier que lorsque $\forall\, t\in\mathbb{R},\ f(t)=e^{at}$

   Alors la fonction f vérifie (E) et $f(0)=0$

   $>$ On a bien $f(x+y)=e^{a(x+y)}=e^{ax}e^{ay}=f(x)f(y)$

   $>$ Et $f(0)=e^{a\,0}=e^{0}=1$

   Conclusion : La synthèse valide, les fonctions dérivable vérifiant (E) sont $f: x\longmapsto e^{at}$ $_{\text{avec } a\,\in R}$

4. Facultatif On suppose que f est seulement continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie la relation (E)

   Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet des primitives. On note H l'une d'elle.

   Comme f est continue on primitive (E) par rapport à y

   $$\text{Ainsi } \forall\, x,y,\ H(x+y)=f(x)\,H(y)+K \implies \forall\, x,\ f(x)=\frac{H(x+1492)-K}{H(1492)}$$

   Ainsi f s'exprime en fonction de fonction dérivable donc f est bien dérivable.

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

1. On doit résoudre sur $]-\infty, 0[$, l'équation différentielle : $-x\,y' + (x-1)y = x^3$

   > C'est une EDL1 complète.

   > A faire (Facile) : la fonction $f : x \longmapsto x^2 + 3x + 6 + \dfrac{6}{x}$ est une solution particulière sur $\mathbb{R}_-^*$ de l'équation complète.

   > Après calcul, on trouve que $\forall\, x < 0,\ h(x) = k\,\dfrac{e^x}{x}$

   Conclusion : $\forall\, x < 0,\ y(x) = y_0(x) + h(x) = \left(x^2 + 3x + 6 + \dfrac{6}{x}\right) + k\,\dfrac{e^x}{x}$

2. On doit résoudre sur $]0, +\infty[$, l'équation différentielle : $x\,y' + (x-1)y = x^3$

   > C'est une EDL1 complète.

   > Sol Part. On cherche une fonction y_0 vérifiant $x\,y_0' + (x-1)y_0 = x^3\ \forall\, x > 0,\ y_0(x) = a\,x^2 + b\,x + c$

   après calculs, je trouve/choisis $y_0(x) = x^2 - x$

   > Après calcul, on trouve que $\forall\, x < 0,\ h(x) = m\,x\,e^{-x}$

   Conclusion : $\forall\, x > 0,\ y(x) = y_0(x) + h(x) = \left(x^2 - x\right) + m\,x\,e^{-x}$

3. La solution y se prolonge en 0 Ssi les limites à Gauche et à Droite existent et coïncident

   > A Droite. $\lim\limits_{x\to 0^+} y(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(x^2 - x + m\,x\,e^{-x}\right) = 0.$

   > A Gauche. $\lim\limits_{x\to 0^-} y(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(x^2 + 3x + 6 + \dfrac{6}{x} + k\,\dfrac{e^x}{x}\right) =$ *C'est une FI*

   On fait une approximation linéaire ainsi

$$x^2 + 3x + 6 + \frac{6}{x} + k\,\frac{e^x}{x} = \frac{6+k}{x} + (6+k) + o(1)$$

$\boxed{\text{Situation : } k \neq -6}$

On a alors $\lim\limits_{x\to 0^-} y(x) = \infty$

Dans cette situation la limite à gauche n'existe pas et donc il ne peut y avoir de prolongement.

$\boxed{\text{Situation : } k = -6}$

On a alors $\lim\limits_{x\to 0^-} y(x) = 0$

Dans cette situation la limite à gauche et la limite à droite existent et sont égales

et donc il y a prolongement en 0 avec $y(0) = 0$

Solution de l'exercice 6 (Énoncé) On suppose que la fonction y est solution de l'équation différentielle

$$y' + y = y^2.$$

Remarque : Il y a y^2 donc l'équation différentielle n'est pas linéaire et Donc le théories classiques ne s'appliquent pas.

1. On suppose que la fonction y ne s'annule pas sur $\mathfrak{D}$.
   On considère la fonction z définie par $z(x) = \dfrac{1}{y(x)}$ *qui forcément ne s'annule pas*

   On a $z(x) = \dfrac{1}{y(x)}$
   comme la fonction y ne s'annule pas sur $\mathfrak{D}$
   La fonction z est bien définie et ne s'annule pas sur $\mathfrak{D}$
   $\Longrightarrow$ On a donc $y(x) = \dfrac{1}{z(x)}$ et $y'(x) = [y(x)]' = \left[\frac{1}{z(x)}\right]' = \frac{-z'(x)}{[z(x)]^2}$

   Comme : $y'(x) + y(x) = [y(x)]^2$
   On remplace $y(x)$ et $y'(x)$
   $\Longrightarrow \dfrac{-z'(x)}{[z(x)]^2} + \dfrac{1}{z(x)} = \left[\dfrac{1}{z(x)}\right]^2$
   $\Longrightarrow -z'(x) + z(x) = 1$ *car* $z(x)$ *est tjs* $\neq 0$

2. La fonction z est solution d'une EDL1 complète *de la physique*
   Ainsi z est la somme
   $>$ D'une solution particulière constante (à cause de la physique). On trouve $\forall x \in \mathbb{R},\ y_0(x) = 1$
   $>$ Des solutions de l'équation homogène, on trouve $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = K\,e^x$
   Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ z(x) = 1 + K\,e^x$

   Pour en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \dfrac{1}{z(x)} = \dfrac{1}{1 + K\,e^x}$ *avec* $K > 0$ *car on ne divise pas par* 0.
   Normalement on devrait synthétiser CàD vérifier que les fonctions ci-dessus conviennent

Solution de l'exercice 7 (Énoncé)

1. On sait que $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

   $>$ On dérive cette égalité $\frac{d}{dx}[...] = \frac{d}{dx}[...]$,

   $$\text{Ainsi } f''(x) = \frac{-1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

   $>$ On applique $f'(\square) = f\left(\frac{1}{\square}\right)$ avec $\square = \frac{1}{x}$

   $$\text{Ainsi } f'\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)\text{, on a donc } f''(x) = \frac{-1}{x^2} f(x)$$

   Conclusion : On a bien : $\forall\, t > 0,\ t^2 f''(t) + f(t) = 0.$

2. On considère la fonction g définie par $g(u) = f(e^u)$.

   (a) On peut calculer le nombre $g(u)$ Ssi $e^u \in D_f =]0, +\infty[_{\text{ Donc pas de problème car } e^{\square}>0.}$

   $$\text{Ainsi } g \text{ est def, C}^0 \text{ et même } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}$$

   (b) On a $g(u) \ = f(e^u)$

   $\Longrightarrow\ g'(u) = [f(e^u)]' = e^u f'(e^u)$

   et $\ g''(u) = [e^u f'(e^u)]' = e^u f'(e^u) + (e^u)^2 f''(e^u)$

   On a donc

   $$A\ g''(u) + B\ g'(u) + C\ g(u) = A\ \left(e^u f'(e^u) + (e^u)^2 f''(e^u)\right) + B\ e^u f'(e^u) + C\ f(e^u)$$

   $$= A\ (e^u)^2 f''(e^u) + (A+B)\ e^u f'(e^u)\ + C\ f(e^u)$$

   Je choisis $\ A = 1$ et $A + B = 0$ et $C = 1$

   $$= (e^u)^2 f''(e^u) + \ f(e^u) = 0$$

   Car c'est l'équa diff de Q1 avec $\ t = e^u > 0$.

   (c) La fonction g est solution de l'équation différentielle

   $$1\ g''(u) + (-1)\ g'(u) + 1\ g(u) = 0$$

   C'est une EDL2, on sait la résoudre.

3. On sait que $f(e^u) = g(u)$, on applique avec $u = \ln x$ ainsi

   $$\forall ß, x > 0,\ f(x) = g(\ln x)$$

$\Longrightarrow$ **Attention** : *Comme la résolution est longue, on a surement fait des* $\Longrightarrow$ *donc il faut vérifier parmi les solutions trouvées, celles qui effectivement vérifient* $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ *et* $f(1) = 1$