DM 6. Gudermann et Fibonacci

» **On se couple (ou pas) librement pour ce devoir.**

> Exercice 1 : Étude de fonction et complément de cours sur "Dérivable sauf aux bornes".

> Exercice 2 : Fibonacci et arc-tangente.

> Exercice 3 : Révision autour des fonction sinh et cosh et le cours sur tan-Arctan transposer au couple $gd - arcgd$.

La question Q3 est délicate encore plus que la question Q2, où on doit simplifier $\cos(\arctan \square))$

Exercice 1. [Correction] Soit la fonction $f : x \longmapsto \arccos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

1. Ensemble de définition et de dérivabilité.
   (a) Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \in [-1,1]$

   En déduire $\mathscr{D}$, l'ensemble de définition de la fonction f.

   (b) Dérivabilité ?

Complément de cours
La fonction Arc-Cosinus est définie continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$.
Donc $\arccos(\square)$ est dérivable Ssi $\square \in]-1,1[$

   Montrer que : $\dfrac{1-x^2}{1+x^2} \in]-1,1[\iff x \in \mathbb{R}^*$

   En déduire que la fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}' = \mathbb{R}^* =]-\infty,0[\cup]0,\infty[$
2. Montrer que : $\forall\, x > 0,\ f'(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$.

   En déduire que : $\forall\, x > 0,\ f(x) = \arctan(x)$.
3. Montrer que : $\forall\, x < 0,\ f'(x) = \dfrac{-2}{1+x^2}$. En déduire $f(x)$.
4. Dessiner le graphe de f.
5. Question Bonus indépendante des précédentes

   Montrer que : $\forall \theta \in \left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[,\ f(\tan(\theta)) = 2\,|\theta|$. Rq Pour finaliser, on a besoin de savoir simplifier $\arccos(cos(\square))$

   En déduire que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2\,|\arctan(x)|$

Exercice 2. [Correction] On considère la suite de Fibonacci, notée (F_n) définie par :

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \ et\ \forall n \geqslant 0,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

1. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 5,\ \ F_n \geqslant n$.
   En déduire la limite de la suite (F_n)

2. Montrer, à l'aide d'une récurrence simple, que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ F_n\, F_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$$

   Remarque : l'hérédité n'est pas si facile que ça.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $A = \arctan\left(\dfrac{1}{F_{2n}}\right)$ et $B = \arctan\left(\dfrac{1}{F_{2n+1}}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{F_{2n+2}}\right)$
   (a) Démontrer que : $\tan(A) = \tan(B)$.
   (b) Encadrer A et B. En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \arctan\left(\dfrac{1}{F_{2n}}\right) = \arctan\left(\dfrac{1}{F_{2n+1}}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{F_{2n+2}}\right)$

4. Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)$$

5. En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right) = \frac{\pi}{2}$

Exercice 3. [Correction] On appelle fonction de Gudermann, ou gudermannien, la fonction définie par

$$gd : x \longmapsto \arctan\big(\sinh(x)\big)$$

1. Montrer que la fonction gd est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que
   Et vérifier que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ gd'(x) = \dfrac{1}{\cosh(x)}$

2. Démontrer que la fonction gd est solution de l'équation différentielle $y' = \cos(y)$,
   CàD $\forall\, x \in \mathbb{R},\ gd'(x) = \cos\big(gd(x)\big)$

3. On définit la fonction $Arcgd$ par : $Arcgd(a)$ c'est l'unique solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $gd(X) = a$.
   (a) Montrer que la fonction gd réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathscr{D} = \left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$
   Utiliser le théorème de la bijection monotone.
   (b) En déduire que la fonction $Arcgd$ est définie sur $\mathscr{D} = \left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
   On admet que la fonction $Arcgd$ est dérivable sur $\mathscr{D}$,

$$\text{montrer que : } \forall\, x \in \mathscr{D},\ Arcgd'(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. Ensemble de définition et de dérivabilité.
   (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
   $$1 - \frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{1-\left(1-x^2\right)}{1+x^2} = \frac{+x^2}{1+x^2} \geqslant 0$$
   Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \leqslant 1.$
   On fait de même l'autre inégalité
   L'ensemble $\mathscr{D}$?
   Le nombre $f(x)$ se calcule Ssi $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ se calcule et $\in [-1,1]$
   Donc la fonction f est bien définie sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}$
   De plus la fonction est fabriquée avec ... donc f est continue sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
   (b) À cause de Arc-Cosinus, l'expression $f(x)$ se dérive Ssi $x \in \mathscr{D}$ et $\dfrac{1-x^2}{1+x^2} \in]-1,1[$
   On a
   - $\dfrac{1-x^2}{1+x^2} < 1 \iff 1 - \dfrac{1-x^2}{1+x^2} > 0 \iff \dfrac{x^2}{1+x^2} > 0 \iff x \neq 0.$
   - $\dfrac{1-x^2}{1+x^2} > -1 \iff \dfrac{1-x^2}{1+x^2}1 > 0 \iff \dfrac{1}{1+x^2} > 0$ tjr vrai

   Conclusion : L'expression $f(x)$ est dérivable Ssi $x \in \mathscr{D}$ et $\times \neq 0$
   Donc la fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}' = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$
2. Pour tout $x \neq 0$, on a
   $$\begin{aligned}
   f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right] &= \frac{-2x(1+x^2)-(1-x^2)2x}{(1+x^2)^2}\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \\
   &= \frac{-4x}{(1+x^2)^2}\frac{-1}{\sqrt{\dfrac{\left(1+x^2\right)^2-\left(1-x^2\right)^2}{(1+x^2)^2}}} \\
   &= \frac{4x}{(1+x^2)^2}\sqrt{\frac{\left(1+x^2\right)^2}{4x^2}} \\
   &= \frac{4x}{(1+x^2)^2}\frac{\left|1+x^2\right|}{2|x|} \\
   &= \frac{4x}{(1+x^2)^2}\frac{1+x^2}{2|x|} \\
   &= \frac{2}{1+x^2}\frac{x}{|x|} = \begin{cases} \text{Si } x > 0,\ f'(x) = \dfrac{2}{1+x^2} \\ \text{Si } x < 0,\ f'(x) = \dfrac{-2}{1+x^2} \end{cases}
   \end{aligned}$$
3. On primitive les 2 égalités, ainsi $\begin{cases} \text{Si } x > 0,\ f(x) = 2\arctan(x) + K \\ \text{Si } x < 0,\ f(x) = -2\arctan(x) + K' \end{cases}$

   On calcule les constantes K et K' avec $f(0) = \arccos\left(\dfrac{1-0^2}{1+0^2}\right) = \arccos 1 = 0$

   car la fonction f est continue sur $\mathscr{D} = R$ donc les "expressions" bavent/débordent en $x = 0$

   Ainsi $f(0) = 0 = 2\arctan(0) + K \implies K = 0$ et de même $K' = 0$

   $$\text{Conclusion : } \begin{cases} \text{Si } x > 0,\ f(x) = 2\arctan(x) \\ \text{Si } x < 0,\ f(x) = -2\arctan(x) \end{cases}$$
4. Dessiner le graphe de f.

5. Pour $\theta \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, on a,

$$\begin{aligned}
f(\tan(\theta)) &= \arccos\left(\frac{1-\tan^2(\theta)}{1+\tan^2(\theta)}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{\frac{C^2-S^2}{C^2}}{\frac{C^2+S^2}{C^2}}\right) \\
&= \arccos\left(\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)\right) \\
&= \arccos\left(\cos(2\theta)\right) = \begin{cases} \textit{Si } \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ f(\theta) = 2\theta \\ \\ \textit{Si } \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[,\ f(\theta) = -2\theta \end{cases}
\end{aligned}$$

On applique cette égalité avec $\theta = \arctan(x) \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ et cela conclut.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. Récurrence double plutôt facile.
2. Récurrence simple plutôt délicate
3. On a

   $>$ $\tan(A) = \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{F_{2n}}\right)\right) = \frac{1}{F_{2n}}$ car $\arctan(\alpha)$ est une sol de l'eq $\tan(X) = \alpha$

   $>$ Et $\tan(B) = \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)\right) = \frac{\frac{1}{F_{2n+1}} + \frac{1}{F_{2n+2}}}{1 - \frac{1}{F_{2n+1}}\frac{1}{F_{2n+2}}} = \frac{F_{2n+1} + F_{2n+2}}{F_{2n+1}F_{2n+2} - 1}$

   $$\begin{aligned} \textit{Ainsi } \tan(A) - \tan(B) &= \frac{1}{F_{2n}} - \frac{F_{2n+1} + F_{2n+2}}{F_{2n+1}F_{2n+2} - 1} \\ &= \frac{F_{2n+1}F_{2n+2} - 1 - F_{2n}F_{2n+1} - F_{2n}F_{2n+2}}{\cdots\cdots} \\ &= \frac{F_{2n+1}\left(F_{2n+1} + F_{2n}\right) - 1 - F_{2n}F_{2n+1} - \left[-1 + F_{2n+1}^2\right]}{\cdots\cdots} = 0 \end{aligned}$$

   » Enfin comme arctan est croissante et $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, on a $0 < A < \frac{\pi}{4}$ et $0 < B < \frac{\pi}{2}$

   Conclusion : comme $\tan(A) = \tan(B)$ et $0 < A, B < \frac{\pi}{2}$, on a bien $A = B$

4. Télescopage ou récurrence.
5. Comme $F_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. Les fonctions Arc-Tangente et Sinh sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$
   donc $gd = \arctan \circ \sinh$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   De plus
$$\forall x \in \mathbb{R},\ gd'(x) = \cosh(x)\frac{1}{1+\sinh^2(x)}$$
Or on sait que $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$
$$= \cosh(x)\frac{1}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh(x)}$$

2. On sait que $\forall x \in \mathbb{R},\ gd'(x) = \dfrac{1}{\cosh(x)}$.
   On calcule $\cos(gd(x))$
$$\cos(gd(x)) = \cos\Big(\arctan\big(\sinh(x)\big)\Big)$$
On sait que $C^2 + S^2 = C^2 + T^2C^2 = 1$ *donc* $C^2 = \dfrac{1}{1+T^2}$
$$= \oplus\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\Big[\arctan\big(\sinh(x)\big)\Big]}}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{1+\sinh^2(x)}} = \sqrt{\frac{1}{\cosh^2(x)}} = \frac{1}{|\cosh(x)|} = \frac{1}{\cosh(x)}$$
   Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ gd'(x) = \cos(gd(x))$

3. (a) On sait que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cosh(x) \geqslant 1 > 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R},\ gd'(x) \geqslant 0$.
   d'où

x	$-\infty$		$+\infty$
sgn $gd'(x)$		$+$	
gd	$-\pi/2$	$\nearrow$	$\pi/2$

   La fonction gd est continue et strictement croissante
   donc (thm de la bijection monotone) elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\pi/2\,,\pi/2\right[$.

   (b) Comme gd réalise une bijection, ainsi l'équation $gd(X) = a$ admeyt bien une unique solution
   Lorsque $a \in \left]-\pi/2\,,\pi/2\right[$
   Conclusion : la fonction gd est bien définie sur $\left]-\pi/2\,,\pi/2\right[$

   De plus $\forall x \in \left]-\pi/2\,,\pi/2\right[,\ gd\,(arcgd(x)) = x$. On dérive cette égalité.
   > À droite : $[x]' = 1$
   > À Gauche : $[gd\,(arcgd(x))]' = arcgd'(x).gd'(arcgd(x))$
   Or $gd'(\square) = \cos(gd(\square))$
   Donc $gd'\,(arcgd(x)) = \cos(gd(arcgd(x))) = \cos(x)$ *car $arcgd(a)$ est une sol ...*

   Conclusion : $arcgd'(x).\cos(x) = 1$ ainsi $arcgd'(x) = \dfrac{1}{cos(x)}$