DM 7. Racine n-ième

Exercice 1. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Résoudre l'équation $(X+1)^n = 1$ et simplifier l'expression des racines.
2. On note $z_0 = 0$ et $z_1, ..., z_{n-1}$ les racines non-nulles de P.
   Factoriser le polynôme $P(X) = (X+1)^n - 1$.
   En considérant le coefficient de X^1, montrer que : $z_1 \cdots z_{n-1} = (-1)^{n-1} n$
3. Calculer $z_1 \cdots z_{n-1}$ en utilisant l'expression des racines trouvées à la question Q1.
4. En déduire que : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Exercice 2. [Correction]

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. on considère le polynôme

$$Q_n(z) = \frac{1}{2i}\left[(z+i)^{2n+1} - (z-i)^{2n+1}\right]$$

   (a) Est ce que 0 est une racine du polynôme Q_n ?
   (b) Montrer que le polynôme $Q_n(z)$ est pair.
   (c) Montrer que : $Q_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0,\ k\, impair}^{2n+1} [\cdots] = \sum_{p=0}^{n} \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p\, z^{2n-2p}$
   Préciser le degré de Q_n et calculer les coefficients a_{2n} de z^{2n} et a_{2n-2} de z^{2n-2}.
   (d) À l'aide des racines $(2n+1)$-ième de l'unité, déterminer les racines $r_1, r_2, ...$ de Q_n (Attention le nombre de racine est égale au degré).
   puis exprimer les racines $r_1, r_2, ...$ sans les exponentielles complexes.
   (e) En utilisant la périodicité de la fonction Tangente, justifier que $r_{n+1} = -r_n$.
   On admettra les autres égalités, CàD $r_{n+2} = -r_{n-1}$,.....
   En déduire que

$$Q_n(X) = (2n+1)\left(X^2 - (r_1)^2\right) .... \left(X^2 - (r_n)^2\right) \quad \text{avec } r_k = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

   (f) En développant l'expression factorisée précédente, calculer le coefficient de X^{2n-2} du polynôme Q

$$\text{En déduire que : } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

2. Une limite très classique.
   (a) Montrer que : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \sin x \leqslant x \leqslant \tan x$.
   (b) en déduire que : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \dfrac{1}{\tan^2(x)} \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{\tan^2(x)} + 1$.
   (c) On pose pour $n \geqslant 1$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.
      i. A l'aide de l'encadrement précédent construire un encadrement pour S_n.
      ii. En déduire que : $S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6}$.

Bonus Géométrie et nombre complexe

Exercice 3. [Correction] Un peu de géométrie avec les complexes

1. Soit A, B, C trois points d'affixe a, b, c.
   (a) Exprimer le complexe $e^{i\pi/3}$ en fonction du complexe j. (On pourra placer les complexes sur le cercle trigo).
   En déduire que le triangle ABC est équilatéral direct Ssi $\overrightarrow{AC}$ se déduit de $\overrightarrow{AB}$ par ...... Ssi $c - a = -j^2 (b - a)$
   (b) En déduire que : le triangle ABC est équilatéral direct Ssi $a + bj + cj^2 = 0$
2. Application : Le théorème de Napoléon.
   L'énoncé des lettres d'un triangle se fera toujours dans le sens direct et on note en minuscule m l'affixe du point M.
   On considère une triangle (quelconque) ABC.
   Soient D, E et F tels que les triangles BAD, CBE et ACF sont équilatéraux (et nécessairement à l'extérieur de ABC).
   On note G, H et K les centres (de gravité, par exemple) respectifs de ces trois triangles équilatéraux.

   On veut montrer que GHK est lui-même un triangle équilatéral.

   (a) Faire une figure.
   (b) À l'aide de Q1b, déterminer l'affixe d du points D puis l'affixe g du points G
   On admet que l'affixe du centre de gravité d'un triangle XYZ est $\frac{x+y+z}{3}$
   (c) Sans refaire les calculs, par analogie, donner les affixes h, k des points H et K.
   (d) Vérifier que le triangle GHK est un triangle équilatéral directe

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. On a $(X+1)^n = 1 \iff \left\{ \begin{array}{l} U^n = 1 \\ X+1 = U \end{array} \right.$

   $>$ Les racines/solutions de l'équation $U^n = 1$ sont $U = U_k = \omega_k = \exp\left(i\,k\,\dfrac{2\pi}{n}\right)$ avec $k \in \{0, 1, ..., (n-1)\}$

   $>$ Ainsi on trouve n racines/solutions $X = z_k = -1 + U_k = -1 + \exp\left(i\,k\,\dfrac{2\pi}{n}\right)$ avec $k \in \{0, 1, ..., (n-1)\}$

   Avec l'argument moité, on obtient
   $$z_k = \exp\left(i\,k\,\frac{\pi}{n}\right)\left[-2i\sin\left(k\,\frac{\pi}{n}\right)\right]$$

2. On note $z_0 = 0$ et $z_1, ..., z_{n-1}$ les racines non-nulles de P.

   Pour factoriser le polynôme $P(X) = (X+1)^n - 1$ il faut les racines (déjà fait ci dessus) et le coeft dominant.

   On a $(X+1)^n - 1 = Binôme = \left[\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} K^k - 1\right] = [X^n + \cdots] - 1 = X^n + \cdots$

   Ainsi on a $P(X) = (X+1)^n - 1 = 1(X - \underbrace{z_0}_{=0})(X - z_1)\cdots(X - z_{n-1}) = 1X(X - z_1)\cdots(X - z_{n-1})$

   Le coefficient de X^1, est égale à

   $>$ Avec $P(X) = 1X(X - z_1)\cdots(X - z_{n-1})$, il vaut $(-1)^{n-1} z_1 \cdots z_{n-1}$

   $>$ Avec $P(X) = (X+1)^n - 1 = Binôme$, il vaut n

   Conclusion : $(-1)^{n-1} z_1 \cdots z_{n-1} = n \iff z_1 \cdots z_{n-1} = (-1)^{n-1} n$

3. On a avec Q1
   $$z_1 \cdots z_{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} \underbrace{\exp\left(i\,k\,\frac{\pi}{n}\right)\left[-2isin\left(k\,\frac{\pi}{n}\right)\right]} = \cdots = (-1)^{n-1} 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} sin\left(k\,\frac{\pi}{n}\right)$$

   Ainsi on a $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. On a $Q_n(0) = \dfrac{1}{2i}\left[(z+i)^{2n+1} - (z-i)^{2n+1}\right] = \dfrac{1}{2i}\left[2(i)^{2n+1}\right] = \dfrac{1}{i}\left[i\,(i^2)^n\right] = (-1)^n \neq 0.$

   Donc 0 n'est pas une racine de Q_n.

2. On a $Q_n(-X) = \cdots = Q_n(X)$ donc le polynôme Q_n est pair.

3. Avec le binôme on a

$$\begin{aligned}
Q_n(z) &= \frac{1}{2i}\left[(z+i)^{2n+1} - (z-i)^{2n+1}\right]\\
&= \frac{1}{2i}\left[\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(i)^k (z)^{2n+1-k} - \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(-i)^k (z)^{2n+1-k}\right]\\
&= \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(z)^{2n+1-k}(i)^k \underbrace{\left[1-(-1)^k\right]}_{=\text{ à 0 ou 2 selon parités}}\\
&= \frac{1}{2i}\sum_{k=0,\ k\,impair}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(z)^{2n+1-k}(i)^k\,2\\
&\qquad \textit{On ré-indexe avec } k = 2p+1. \textit{ C'est possible car } k \textit{ est impair}\\
&= \frac{1}{i}\sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(z)^{2n+1-(2p+1)}\underbrace{(i)^{2p+1}}_{=i\,(-1)^p}\\
&= \sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p\,z^{2n-2p}
\end{aligned}$$

   Ainsi

   > Sur le plateau $p=0$, on lit coefficient de z^{2n}, c'est $a_{2n} = \dbinom{2n+1}{1} = 2n+1$

   > Sur le plateau $p=1$, on lit coefficient de z^{2n-2}, c'est $a_{2n} = -\dbinom{2n+1}{3} = -\dfrac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6}$

4. On résout l'équation $Q_n(z) = 0$.

$$\begin{aligned}
Q_n(z) = 0 &\iff (z+i)^{2n+1} - (z-i)^{2n+1} = 0\\
&\iff \left\{ \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{2n+1} = 0 \right.\\
&\iff \left\{ \begin{array}{ll} U^{2n+1} = 1 & (A)\\ et & \\ \frac{z+i}{z-i} = U & (B) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

   > Résolution de (A).

   Les solutions sont les racines (2n+1)-ième de l'unité,

   CàD $\omega_k = \exp\left(i\,k\,\dfrac{2\pi}{2n+1}\right)$ avec $k \in \{0, .., 2n\}$

   > Résolution de (B).

   On a $\dfrac{z+i}{z-i} = U_k \Leftrightarrow z + i = \omega_k\,(z-i)$

$$\Leftrightarrow z\,(1-\omega_k) = -i\,(1+\omega_k)$$

Situation $\omega_0 = 1$	Situation $\omega_1, .., \omega_{2n} \neq 1$
Dans cette situation, l'équation n'a pas de solution en z.	On a $z = r_k = \dfrac{-i\,(1+\omega_k)}{1-\omega_k}$ avec $k \in \{1, .., 2n\}$

Conclusion : On a $2n$ racines $r_k = \dfrac{-i\,(1+\omega_k)}{1-\omega_k}$ avec $k \in \{1, .., 2n\}$

De plus pour tout $k \in \{1,..,2n\}$, on a

$$r_k = \frac{-i\left(1+\omega_k\right)}{\left(1-\omega_k\right)} = \frac{-i\left(1+\exp\left(\frac{2ik\pi}{2n+1}\right)\right)}{1-\exp\left(\frac{2ik\pi}{2n+1}\right)}$$

$$= \text{Argument Moitié} = \frac{\cos\frac{k\pi}{2n+1}}{\sin\frac{k\pi}{2n+1}} = \frac{1}{\tan\frac{k\pi}{2n+1}}$$

5. On remarque que $r_{n+1} = -r_n$, $r_{n+2} = -r_{n-1}$... etc ... on le justifie en utilisant la π-périodicité et l'imparité de $\tan$.
On a maintenant

$$\begin{aligned} Q_n(X) &= (2n+1)\left(X-r_1\right)\left(X-r_2\right)...\left(X-r_n\right)\ \left(X+r_1\right)\left(X+r_2\right)...\left(X+r_n\right) \\ &= (2n+1)\left(X-r_1\right)\left(X+r_1\right)...\left(X-r_n\right)\left(X+r_n\right) \\ &= (2n+1)\left(X^2-(r_1)^2\right)\left(X^2-(r_2)^2\right)...\left(X^2-(r_n)^2\right) \end{aligned}$$

6. Le coefficient de X^{2n-2} du polynôme Q est égale à

$>$ D'une part avec la question Q2a., il est égale à : $-\dfrac{(2n+1)n(2n-1)}{3}$

$>$ D'autre part avec la factorisation de la question Q5, il est égale à : $(2n+1)\left[-r_1^2-\cdots-r_n^2\right]$

$$\text{Conclusion : } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = r_1^2+....+r_n^2 = \frac{\frac{(2n+1)n(2n-1)}{3}}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

7. (a) Convexité.
(b) On sait que : $0<a<b<c \implies 0<a^2<b^2<c^2$, ainsi

$$\begin{aligned} \forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\ & 0<\sin x \leqslant x \leqslant \tan x \\ &\implies 0<\sin^2 x \leqslant x^2 \leqslant \tan^2 x \\ &\implies 0<\frac{1}{\tan^2 x}<\frac{1}{x^2}<\frac{1}{\sin^2 x} \\ &\implies 0<\frac{1}{\tan^2 x}<\frac{1}{x^2}<\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x} \\ &\implies 0<\frac{1}{\tan^2 x}<\frac{1}{x^2}<1+\frac{1}{\tan^2 x} \end{aligned}$$

(c) Pour tout $k \in \{1,..,n\}$,alors $0<\dfrac{k\pi}{2n+1}<\dfrac{\pi}{2}$. On applique donc d'après l'inégalité précédente avec $\dfrac{k\pi}{2n+1}$

$$\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leqslant \left(\frac{2n+1}{k\pi}\right)^2 \leqslant \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)+1$$

On somme l'encadrement précédent de $k=1$ à $k=n$ et on utilise $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n\left(2n-1\right)}{3}$, ainsi

$$\frac{n\left(2n-1\right)}{3} \leqslant \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^2 \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^2 S_n \leqslant \frac{n\left(2n-1\right)}{3}+n$$

(d) On isole S_n puis utilise le théorème d'encadrement.

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. Soit A, B, C trois points d'affixe a, b, c.
   (a) Avec un cercle trigo, on a $e^{i\pi/3} = -j^2$.
   le triangle ABC est équilatéral direct
   Ssi $\overrightarrow{AC}$ se déduit de $\overrightarrow{AB}$ par la rotation d'angle $+\pi/3$
   Ssi $\underbrace{c-a}_{=\overrightarrow{AC}} = \underbrace{e^{i\pi/3}}_{Rotation} \underbrace{(b-a)}_{\overrightarrow{AB}}$
   (b) le triangle ABC est équilatéral direct Ssi

$$\begin{aligned} c-a = e^{i\pi/3}(b-a) &\iff c-a = -j^2(b-a) \\ &\iff (j^2+1)a - j^2 b - c = 0 \\ &\iff -j\,a - j^2 b - c = 0 \\ &\iff (-j)\left[a + bj + cj^2\right] = 0 \\ &\iff a + bj + cj^2 = 0 \end{aligned}$$

2. Application : Le théorème de Napoléon.