Ensemble, Fonction.

1 Les ensembles

1.1 Les éléments.

Nous ne définirons pas rigoureusement la notion d'ensemble, celle-ci sera considérée comme intuitive. Nous nous contenterons de la « définition » suivante :

Définition 1.
Un ensemble E est une collection d'objets, ceux-ci sont appelés **éléments** de E.

> Lorsque x est un élément de E, on écrira $x \in E$ (se lit « x appartient à E »).
Dans le cas contraire on écrira $x \notin E$.

> L'ensemble vide, noté $\varnothing$, n'a pas d'élément
Ainsi $x \in \varnothing$ est oups!!!!

> Deux ensembles E et F sont dits égaux
Ssi ils ont les mêmes éléments, on écrira alors $E = F$.

> Un ensemble est présenté avec des accolades, CàD $\{...\}$.

Théorème
> Dans un ensemble, il n'y a ni ordre, ni de répétition,

$$\text{CàD } \{1,3,2,1,1,3\} = \{1,2,3\}$$

> Quand on rencontre un ensemble E, il faut savoir ce que cela signifie sur les éléments,

CàD il faut savoir compléter, $x \in E \iff$ ....

Exemples : Faire l'exercice 5

Par exemples

> Les ensembles de nombre : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

> Les ensembles de matrices : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

> Les ensembles des fonctions de $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$, noté $\mathcal{C}(\mathcal{D}, \mathcal{A})$.

1.2 Inclusion, Intersection, ...

Définition 2. Opérations sur les ensembles.
Soient A et B deux ensembles

> **L'inclusion** : On dit que A est inclus dans B, noté $A \subset B$,
Ssi tous les éléments de A sont également éléments de B, on a donc

$$A \subset B \iff \forall x,\ [x \in A \Rightarrow x \in B]$$

Vocabulaire : Quand $A \subset B$, on dit que A est une partie de B ou un sous ensemble de B.

Complément : $A \subsetneq B$ Ssi A est un sous ensemble strict de B, CàD $A \subset B$ mais $B \neq A$.

Pour démontrer que $A \subset B$

On suppose que $x \in A$

$\boxed{\text{On veut démontrer } x \in B}$

> **La réunion** : On note $A \cup B$ (se lit « A union B »), l'ensemble que l'on obtient en regroupant les éléments de A avec ceux de B. On a donc

$$x \in A \cup B \iff x \in A \ ou \ x \in B$$

> **L'intersection** : On note $A \cap B$ (se lit « A inter B »), l'ensemble des éléments communs à A et B. On a donc

$$x \in A \cap B \iff x \in A \ et \ x \in B$$

> **La différence** : on note $A \backslash B$ (se lit « A moins B »), l'ensemble des éléments qui sont dans A mais pas dans B. On a donc

$$x \in A \backslash B \iff x \in A \ et \ x \notin B$$

Vocabulaire : Lorsque B est une partie de A, CàD $B \subset A$, l'ensemble $A \backslash B$ est appelé le complémentaire de B dans A et on le note $C_A(B)$ ou $\mathscr{C}_A(B)$

> **Le complémentaire** : On note $\mathscr{C}(A)$ ou $\mathscr{C}_E(A)$ ou $\overline{A}$,
CàD l'ensemble des éléments qui ne sont pas dans A et qui sont dans E.

Théorème 3. Lois de Morgan,complémentaire
Soient A, B, C des ensembles.

> **Lois de Morgan.** L'intersection de distribue sur la réunion et "réciproquement"

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \text{ et } A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

> **Avec le complémentaire**

> $\mathscr{C}_E(\varnothing) = E, \quad \mathscr{C}_E = \varnothing \quad$ et $\quad \mathscr{C}_E(\mathscr{C}_E(A)) = A.$

> $A \cup \mathscr{C}_E(A) = E \quad$ et $\quad A \cap \mathscr{C}_E(A) = \varnothing.$

> $\mathscr{C}_E(A \cap B) = \mathscr{C}_E(A) \cup \mathscr{C}_E(B) \quad$ et $\quad \mathscr{C}_E(A \cup B) = \mathscr{C}_E(A) \cap \mathscr{C}_E(B)$

Faites des patatoïdes et visualiser

1.3 Les ensembles $A \times B$ et $\mathcal{P}(E)$.

Définition 4. Les ensembles $A \times B$ et $\mathcal{P}(E)$.

Les Produit Cartésien $A \times B$ et $A \times A = A^2$

Soient A et B deux ensembles.
Le produit cartésien de A et B, noté $A \times B$, c'est l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in A$ et $y \in B$.
On a donc

$$(x, y) \in A \times B \iff x \in A \text{ et } y \in B$$

L'ensemble $A \times A$ est noté A^2

Remarque : Ne pas confondre parenthèse et accolade, couple et ensemble.

> *Dans le couple* $(1,2)$ *l'ordre est important,*
CàD $(1,2) \neq (2,1)$ *et il peut y avoir des répétitions, CàD* $(1,1) \neq (1)$.

> *Par contre pour les ensembles*
$\{1,2\} = \{2,1\}$, $\{1,1\} = \{1\}$ *et* $\{2,1,1,2\} = \{2,1\} = \{1,2\}$

De même on définit $A_1 \times ... \times A_n$ et $A \times A \times ... \times A = A^n$

L'ensemble des Parties $\mathcal{P}(E)$

Soit E un ensemble.
On a déjà vu que A est une partie de E ou un sous ensemble de E Ssi $A \subset E$.
L'ensemble des parties de E est, noté $\mathcal{P}(E)$. On a donc

$$A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E$$

`La notion est subtile car : à gauche, c'est ∈ et à droite, c'est ⊂`

Exemple. Soit $E = \{1,2\}$. On va déterminer $\mathcal{P}(E)$.

Pour déterminer $\mathcal{P}(E)$, il faut décrire $\mathcal{P}(E)$.

Comme E a 2 éléments, les parties ou sous ensemble de E ont : soit 0, soit 1, soit 2 éléments.

> Il y a 1 partie à 0 élément : c'est $\varnothing$.

> Il y a 2 parties à 1 élément : ce sont $\{1\}$ et $\{2\}$.

> Il y a 1 parties à 2 éléments : c'est $E = \{1,2\}$.

$$\textbf{Conclusion} : \mathcal{P}(E) = \left\{ \varnothing, \{1\}, \{2\}, \underbrace{\{1,2\}}_{=E} \right\}$$

2 Fonction-Injectivité-Surjectivité.

2.1 Les fonctions.

Définition 5. Définition et propriétés des fonctions.

Soit $\mathscr{D}$ et A deux ensembles.

Une fonction f de $\mathscr{D}$ à valeurs dans A est une correspondance qui, à tous éléments x de $\mathscr{D}$ associe un unique élément de A noté $f(x)$.

Attention : les fonctions que l'on étudiera
ne sont pas à priori des fonctions numériques.

`Vocabulaire.`

> $\mathscr{D}$, c'est l'ensemble de définition de la fonction f.
> l'élément $f(x) \in \mathscr{A}$, c'est la fonction f appliquée, évaluée en x.
> Lorsque $y = f(x)$, on dit que y est l'image de x par f et que x est un antécédent de y.

Exemples

> **Les fonctions numériques.**

Les fonctions numériques CàD $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$ et , $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}$ fournissent les exemples classiques de fonctions.
C'est notre modèle!!!

> **La fonction associée à une matrice.**

Soit A une matrice de taille n, p.
La fonction associée à la matrice A, c'est la fonction, notée h_A, de $\mathscr{D} = \mathbb{R}^n$ à valeurs $\mathscr{A} = \mathbb{R}^p$ définie par

$$\forall \overrightarrow{U} \in \mathbb{R}^n, \quad h_A(\overrightarrow{U}) = A\overrightarrow{U}$$

> **Opérateur de dérivation.**

On note
> $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ continue
> $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ continument dérivable

L'opérateur de dérivation est la fonction, notée D, est la fonction de $\mathscr{D} = \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathscr{A} = \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par

$$\forall f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), \quad D(f) = f'$$

Théorème 6. Propriétés "évidentes" des fonctions.

On considère une fonction f de $\mathscr{D}$ à valeurs dans A

> Ne pas confondre : la fonction f et le nombre $f(x)$
Plus précisément $f(x)$ c'est la fonction évaluée/appliquée en x

> Par définition,

$$x \in \mathscr{D} \text{ Ssi on peut calculer le nombre } f(x).$$

> **La grande propriété** "évidente" des fonctions

$$\text{Si } x = 2 \text{ alors } f(x) = f(2)$$

Plus généralement : Si $x = x'$ alors $f(x) = f\left(x'\right)$

2.2 Injectivité.

Définition 7. Définition de l'injectivité.
On considère une fonction f définie de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathscr{A}$.

On dit que la fonction est injective Ssi

$$\forall (x, x') \in \mathscr{D}^2, \quad \left[f(x) = f(x') \implies x = x' \right]$$

`Attention à ne pas confondre` :

> la définition de l'injectivité

> et la propriété "naturelle" des fonctions, CàD $[x = x' \implies f(x) = f(x')]$

Pour démontrer que la fonction f est injective.

On suppose que $f(x) = f(x')$

$\boxed{\text{On veut démontrer } x = x'}$

Théorème 8. Résultats classiques
Injectivité et composée.

Soit f et g des fonctions composables

$$\left.\begin{array}{l} \text{La fonction } f \text{ est injective} \\ \\ \text{La fonction } g \text{ est injective} \end{array}\right\} \implies \text{la composée } [g \circ f] \text{ est injective}$$

$$\text{la composée } [g \circ f] \text{ est injective} \implies \left\{\begin{array}{l} \text{La fonction } f \text{ est injective} \\ \\ \text{Par contre, on ne sait rien pour la fonction } g \end{array}\right.$$

Injectivité et Équation. Soit f une fonction de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathscr{A}$.

Si f est injective

alors $\forall b \in \mathscr{A}$, l'équation $f(x) = b$ admet 0 ou 1 solution (dans $\mathscr{D}$).

Application : Par contraposée

Si on trouve $b_0 \in \mathscr{A}$ tel que l'équation $f(x) = b_0$ admet 2 (ou plus) solutions distinctes dans $\mathscr{D}$

Alors la fonction f n'est pas injective.

On fera les démonstrations en classe.

2.3 Image d'une fonction-Surjectivité.

Définition 9. Image d'une fonction.
On considère une fonction f définie de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathscr{A}$.

> Quand on a dit que la fonction f est à valeurs dans $\mathscr{A}$,
cela signifie que forcément $\forall\ x \in \mathscr{D},\ f(x) \in \mathscr{A}$
mais à priori rien n'assure que $a \in \mathscr{A}$ ait des antécédents.

> L'image de la fonction f, noté $Im(f)$,
c'est l'ensemble des éléments $b \in \mathscr{A}$ qui ont un antécédent.
On a donc

$$b \in Im(f) \iff \text{Il existe a} \in \mathscr{D} \text{ tq } b = f(a)$$
$$\iff \texttt{On peut écrire } b = f(a)$$

Théorème.
> $b \in Im(f)$ Ssi l'équation $f(X) = b$ admet une ou plusieurs solution dans $\mathscr{D}$.
> $b \notin Im(f)$ Ssi l'équation $f(X) = b$ n'a pas de solution dans $\mathscr{D}$.

Exemples

> Les fonctions $Sinus$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ mais $Im(Sinus) = [-1, 1]$.

> Les fonctions $[X^2 : x \longmapsto x^2]$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ mais $Im([X^2]) = [0, +\infty[$.

> Les fonctions $[X^3 : x \longmapsto x^3]$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $Im([X^3]) = \mathbb{R}$.

Définition 10. Définition de la surjectivité.
On considère une fonction f définie de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathscr{A}$.

On dit que la fonction est surjective Ssi $\text{Im}(f) = \mathscr{A}$

On sait que $\text{Im}(f)$, c'est l'ensemble des éléments de $\mathscr{A}$ effectivement atteints par f, on a donc

La fonction f est surjective
Ssi TOUS les éléments de $\mathscr{A}$ sont effectivement atteints
CàD $\forall\ y \in \mathscr{A},\ \exists\ x_{\text{qui dépend de y}} \in \mathscr{D}$ tel que $f(x) = y$

Théorème. La fonction f est surjective Ssi

Ssi pour TOUT $b \in \mathscr{A}$,
l'équation $f(X) = b$ admet 1 solution ou plus dans $\mathscr{D}$.

Ssi pour TOUT $b \in \mathscr{A}$,
On peut écrire $b = f(a)$

Théorème 11. Surjection et composée.
Soit f et g des fonctions composables

$$\left.\begin{array}{r}\text{La fonction } f \text{ est surjective}\\[1em] \text{La fonction } g \text{ est surjective}\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{la composée } [g \circ f] \text{ est surjective}$$

$$\text{la composée } [g \circ f] \text{ est surjective} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{La fonction } g \text{ est surjective}\\[1em] \text{Par contre, on ne sait rien pour la fonction } f\end{array}\right.$$

3 Bijection-Bijection Réciproque.

3.1 Bijection.

Définition 12. bijectivité-fonction identité.

Définition de la bijectivité.

On considère une fonction f définie de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathscr{A}$.

On dit que la fonction f est bijective de $\mathscr{D}$ sur $\mathscr{A}$

Ssi la fonction f est injective **ET** surjective.

La fonction identité.

Soit E un ensemble.

La fonction "identité de E", notée id_E, est définie par : $\forall\, x \in E,\ id_E(x) = x$.

La fonction "identité de E" réalise une bijection de E sur E.

Théorème 13.

Bijection et Équation.

Soit f une fonction bijective de $\mathscr{D}$ sur $\mathscr{A}$ et $b \in \mathscr{A}$.

Alors l'équation $f(x) = b$ admet une et une seule solution dans $\mathscr{D}$

Bijection et composée. Soit f et g des fonctions composables

$$\left.\begin{array}{l}\text{La fonction } f \text{ est bijective}\\ \\ \text{La fonction } g \text{ est bijective}\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l}\text{Alors la fonction } g\circ f \text{ est bijective}\\ \quad \text{et } \left[g\circ f\right]^{-1} = Contravariant = f^{-1}\circ g^{-1}\end{array}$$

$$\text{la composée } \left[g\circ f\right] \text{ est bijective} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{La fonction } f \text{ est injective}\\ \\ \text{La fonction } g \text{ est surjective}\end{array}\right.$$

Le Théorème de la bijection monotone.

Soit f une fonction numérique de $]a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ est continue sur }]a,b] \\ f \text{ est strict croissante sur }]a,b]\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l}\text{Alors la fonction } f\\ \quad \text{réalise une bijection}\\ \quad \text{de }]a,b] \text{ sur } \mathrm{Im}(f) = \left]f(a^+), f(b)\right]\end{array}$$

De plus Si $m \in \mathrm{Im}(f) = \left]f(a^+), f(b)\right]$

alors l'équation $f(X) = m$ admet une unique solution dans $]a,b]$.

3.2 Bijection réciproque.

Définition 14. Définition et propriétés du nombre $f^{-1}(b)$.
Soit f une fonction bijective de $\mathscr{D}$ sur $\mathscr{A}$.

$$f^{-1}(b) = \left| \begin{array}{l} \textit{l'unique solution dans } \mathscr{D} \\ \textit{de l'équation } f(X) = b \end{array} \right.$$

De plus le nombre $f^{-1}(b)$ admet les propriétés suivantes

> $f^{-1}(b)$ appartient à $\mathscr{D}$ et $f^{-1}(b)$ se calcule Ssi $b \in \mathscr{A}$

> $f^{-1}(b)$ est une solution l'équation $f(X) = b$ donc $f\left(f^{-1}(b)\right) = b$

Théorème. Pour expliciter la fonction f^{-1},
on utilise : $f(x) = y \iff \cdots \iff x = f^{-1}(y)$.

Théorème 15. Propriétés naturelles de la fonction bijection réciproque.

On suppose que f est une fonction (numérique) bijective de $\mathscr{D}$ sur $\mathscr{A}$, stric croissante, impaire

Alors la bij rec f^{-1} réalise une bijection de $\mathscr{A}$ sur $\mathscr{D}$, stric croissante, impaire

On suppose que f est une fonction continue, dérivable et f' ne s'annule pas

Alors la fonction bij rec f^{-1} est continue et dérivable et on a $[f^{-1}]' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$

Le graphe de f^{-1} se déduit de celui de f par une symétrie par rapport à la droite $y = x$.

Exemples : Les couples célèbres : bijections - bijection réciproques .

> Le couple : id_E, id_E.

> Le couple : ln, exp.

> Le couple : $[X^2]_{sur\,[0,+\infty[}$, $\left[\sqrt{X}\right]$.

> Le couple : $\tan_{sur\,]-\pi/2,-\pi/2[}$, arctan.

> Le couple : $\sin_{sur\,[-\pi/2,-\pi/2]}$, arcsin.

> Le couple : h_A, $h_{A^{-1}}$ où A est une matrice *inversible*.

Théorème 16. Évident mais en fait plus subtile.

Soit f une fonction de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathscr{A}$ et g une fonction de $\mathscr{A}$ à valeurs dans $\mathscr{D}$. On a

$$\left.\begin{array}{l} g \circ f = id_{\mathscr{D}} \\ \\ f \circ g = id_{\mathscr{A}} \end{array}\right\} \implies \text{Alors la fonction } f \text{ est bijective et } f^{-1} = g$$

Ce résultat est plus subtile
car il faut absolument les 2 égalités $g \circ f = id_{\mathscr{D}}$ et $f \circ g = id_{\mathscr{A}}$ pour conclure.

Complément "évident" : Soit f une fonction bijective de $\mathscr{D}$ sur $\mathscr{A}$ et f^{-1} sa bijection réciproque.

> f^{-1} est bijective et $[f^{-1}]^{-1} = f$.

> $\forall\, y \in \mathscr{A}$, $f(f^{-1}(y)) = y$, cela signifie $f \circ f^{-1} = id_{\mathscr{A}}$

> $\forall\, x \in \mathscr{D}$, $f^{-1}(f(x)) = x$, cela signifie $f^{-1} \circ f = id_{\mathscr{D}}$

4 Exercices

—— Manipulation sur les ensembles ——

Exercice 1. Ensemble et patatoïde.

1. On suppose que $A \subsetneq B$.
   Faites des patatoïdes et visualiser $A \cap B$, $A \cup B$, $A \backslash B$ et $(A \cup B) \backslash (A \cap B)$
2. On suppose que $A \cap B \neq \varnothing$.
   Faites des patatoïdes et visualiser $A \cap B$, $A \cup B$, $A \backslash B$ et $(A \cup B) \backslash (A \cap B)$
3. On suppose que $A \cap B = \varnothing$.
   Faites des patatoïdes et visualiser $A \cap B$, $A \cup B$, $A \backslash B$ et $(A \cup B) \backslash (A \cap B)$

Exercice 2. Soit $E = \{x, y, z\}$ un ensemble. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. $x \in E$
2. $\{x\} \in E$
3. $\{x\} \subset E$
4. $\varnothing \in E$
5. $\varnothing \subset E$
6. $\{\varnothing\} \subset E$
7. $\{x, y\} \in E$
8. $\{x, y\} \subset E$
9. $\{z, y\} \subset E/\{x\}$
10. $E \subset E$
11. $E \in E$

Exercice 3. Pour les ensembles suivants compléter $x \in E \iff$ ....

1. $E = \{1, 3, 5, 7, 9, , ...\}$
2. $E = \{1, 10, 100, 1000, ...\}$
3. $E = \mathbb{Q}$
4. $E = [0, 1[$

Exercice 4. On considère $E_n = \{1, 2, .., n\}$.

1. On suppose que $n = 4$. Lister tous les éléments de $\mathscr{P}(E_4)$
2. Combien-y-a-t-il de parties de E_n qui ont exactement 0 élément ? Combien qui ont exactement 1 élément ?
   Combien qui ont exactement 2 éléments ?

   Soit $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$. Combien-y-a-t-il de parties de E_n qui ont exactement k éléments
3. En déduire qu'il y a exactement 2^n parties dans $\mathbb{E}_n$, CàD que l'ensemble $\mathscr{P}(E_n)$ admet exactement 2^n éléments.

Exercice 5. > "Traduire" les ensembles suivants

$\{x \in \mathbb{R} \mid x^{2n} = 1\}$
$\{x \in \mathbb{C} \mid x^{2n} = 1\}$
$\{x \in \mathbb{C} \mid \overline{x} = x\}$
$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = |z + 1|\}$

$\{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$
$\{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0 \ et \ x - y = 0\}$
$\{y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid y' + 2y = 0\}$

> Est-ce que $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$? Est-ce que $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?
> Est-ce que l'ensemble des fonctions continues est la réunion des fonctions croissantes et des fonctions décroissantes ?

Exercice 6. [Correction] On considère

$$A = \left\{ \frac{\varepsilon}{k(k+1)} \right\}_{k \in \mathbb{N}^*, \varepsilon \in \{-1, 1\}} \quad et \ B = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right\}_{n, m \in \mathbb{N}^*}$$

> Recopier et compléter : $x \in A \iff \cdots$ et $x \in B \iff \cdots$

> Montrer que : $A \subset B$

Exercice 7.

1. Soit E un ensemble et A, B, C des partie/sous-ensemble de E. Montrer que : $A \cup B = A \cap B \iff A = B$
2. Montrer que

$$\left.\begin{array}{l} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{array}\right\} \Longrightarrow B \subset C$$

Injection-Surjection

Exercice 8. Soit $h : x \longmapsto x + \dfrac{1}{x}$.

1. Étudier la fonction h et faire son graphes
2. La fonction h est-elle injective ? surjective ? Déterminer $\text{Im}(h)$.
3. Déterminer $\mathscr{D}_0$ et $\mathscr{A}_0$ tel que la fonction f réalise une bijection de $\mathscr{D}_0$ sur $\mathscr{A}_0$.

Exercice 9. [Correction] Soit la fonction h de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$h(x, y) = (x\,e^{y}, x\,e^{-y}).$$

1. Déterminer les antécédents de $(0,0)$. Que peut-on conclure ?
2. Justifier que $(-6,6)$ n'a pas d'antécédent par h. Que peut-on conclure ?
3. Trouver des conditions sur a et b pour que (a,b) ait des antécédents. Que peut-on conclure ?

Exercice 10. Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? sont-elles surjectives ?

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longrightarrow x + y \end{array} \qquad g : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longrightarrow (x + y, x - y) \end{array} \qquad h \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longrightarrow (x + y, x^2 - y^2) \end{array}$$

Exercice 11. [Correction] On considère les fonctions f et g de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = 2n \quad et \quad g(n) = \begin{cases} n/2 & \text{Lorsque n est pair} \\[2mm] \dfrac{n-1}{2} & \text{Lorsque n est impair} \end{cases}$$

Autour de f.

1. Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$.
2. La fonction f est-elle injective ?
3. La fonction f est-elle surjective ?

Autour de g.

1. Calculer $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$.
2. La fonction g est-elle injective ?
3. La fonction g est-elle surjective ?

Calculer

$$[g \circ f](n) \text{ et } [f \circ g](n).$$

Que peut-on conclure ?

Exercice 12. [Correction] On considère l'opérateur de dérivation, CàD $D : f \longmapsto D(f) = f'$

1. Préciser $\mathscr{D}$, l'ensemble de définition de l'opérateur D.
2. Est ce que l'opérateur de dérivation est injectif ?
3. Justifier que $\mathscr{C}^0$ l'ensemble des fonctions continue appartient à $\text{Im}(D)$ l'image de D.
4. À votre avis, l'opérateur de dérivation est-il surjectif ?

Exercice 13. Soit f, f', g, g' des fonctions

1. On suppose que la fonction f est injective.
   Montrer que : $f \circ g = f \circ g' \implies g = g'$
2. On suppose que la fonction g est surjective.
   Montrer que : $f \circ g = f' \circ g \implies f = f'$

—— Bijection-Bijection Reciproque. ——

Exercice 14. Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : F \to E$ trois fonctions.

1. On suppose que : $f \circ h \circ g$ est une application surjective et que $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ sont des fonctions injectives. Montrer que f, g et h sont bijectives.
2. On suppose que : $g \circ f$ et $h \circ g$ sont des fonctions bijectives. Montrer que f, g et h sont bijectives.

Exercice 15. [Correction] Soit $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \mathscr{D}$ quatre ensembles. Soient $\mathscr{A} \xrightarrow{f} \mathscr{B} \xrightarrow{g} \mathscr{C} \xrightarrow{h} \mathscr{D}$ trois fonctions.
On suppose que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont des fonctions bijectives.

1. Justifier sans calcul que g est bijective. On notera g^{-1} la bijection réciproque.
2. Exprimer f à l'aide de deux fonctions bijectives.
   Ainsi f est bijective.
3. Montrer que h est bijective.

Exercice 16. [Correction] Soient f, g deux fonction de E à valeurs dans E.
On suppose que :

> $f \circ g \circ f = g$ et $g \circ f \circ g = f$

> f est injective.

1. Justifier que : g est injective
2. Montrer que : $f \circ g \circ f \circ g \circ f \circ g = f$.
   En déduire que $\forall e \in E,\ [g \circ f \circ g \circ f \circ g](e) = e$.
3. En déduire que g et f sont bijectives.

5 Compléments

5.1 Fonction indicatrice.

Définition 17. Fonction indicatrice d'une partie.
Soit E un ensemble et A une partie de E, ainsi $A \subset E$.

La fonction indicatrice de la partie A, notée $\mathbf{1}_A$ est la fonction de E à valeurs dans $\{0,1\}$ définie par

$$\forall\, x \in A,\ \mathbf{1}_A(x) = 1 \quad et \quad \forall\, x \notin A,\ \mathbf{1}_A(x) = 0$$

5.2 Restriction.

Définition 18. Restriction d'une fonction à une partie.
Soit E un ensemble et E' une partie de E, ainsi $E' \subset E$.
Soit f une fonction de E à valeurs dans $\mathscr{A}$.

La restriction de f à E', notée $f_{|E'}$, est la fonction

$$\forall\, x \in E',\ f_{|E'}(x) = f(x) \quad et \quad \forall\, x \notin E',\ f_{|E'}(x) = \textit{N'est PAS défini}$$

Exemple. La fonction tan N'est PAS bijective mais $\tan_{\big|]-\pi/2,\pi/2[}$ est bijective de $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$

Et la fonction arctan est la bijection réciproque de $\tan_{\big|]-\pi/2,\pi/2[}$

5.3 Image direct et Image réciproque d'une partie.

Définition 19.
Image directe d'une partie de $\mathscr{D}$

On considère une fonction f de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathscr{A}$.
Soit $E \subset \mathscr{D}$ une partie de $\mathscr{D}$.

L'image directe de E, noté $f\langle E\rangle$ ou $f(E)$, c'est l'ensemble

$$\begin{aligned} f\langle E\rangle &= \{y \in \mathscr{A} \textit{ tel que } \exists x \in E \textit{ avec } y = f(x)\} \\ &= \textit{c'est l'ensemble des valeurs atteintes avec les éléments de } E \end{aligned}$$

Conclusion : $y \in f\langle E\rangle$ alors on peut écrire $y = f(x)$ avec un certain $x \in E$.

Image réciproque d'une partie de $\mathscr{A}$

On considère une fonction f de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathscr{A}$.
Soit $F \subset \mathscr{A}$ une partie de $\mathscr{A}$.

L'image réciproque de F, noté $f^{-1}\langle F\rangle$ ou $f^{-1}(F)$, c'est l'ensemble

$$f^{-1}\langle F\rangle = \{x \in \mathscr{D} \textit{ tel que } f(x) \in F\}$$

Conclusion : $x \in f^{-1}\langle F\rangle \iff f(x) \in F$.

Correction.

Solution de l'exercice 6 (Énoncé) On a

$$x \in A \Longleftrightarrow x\text{" est de la forme" } \frac{\varepsilon}{k(k+1)} \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} Il\ existe\ \varepsilon \in \{-1,1\}\ et\ k \in \mathbb{N}^* \\ \\ x = \dfrac{\varepsilon}{k(k+1)} \end{array} \right.$$

De même

$$x \in B \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} Il\ existe\ n, m \in \mathbb{N}^* \\ \\ x = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{m} \end{array} \right.$$

On va montrer que $A \subset B$.
On suppose que $x \in A$.

$$\boxed{\text{On va montrer que } x \in B, \text{ CàD } x = \frac{1}{\square} - \frac{1}{\square'}}$$

Comme $x \in A$, on peut écrire $x = \dfrac{\varepsilon}{k(k+1)}$ avec $\varepsilon, k \in \ldots$
De plus on a

$$x = \frac{\varepsilon}{k(k+1)} = \varepsilon \frac{1}{k(k+1)} = \varepsilon \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right]$$

Je choisis $n = \dfrac{k}{\varepsilon} = \varepsilon k$ et $m = \varepsilon (k+1)$. Ils conviennent.

Solution de l'exercice 9 (Énoncé)

1. Les antécédents de $(0,0)$ sont les solutions de l'équation $h(X,Y)=(0,0)$.
   On résout

$$h(X,Y)=(0,0) \iff h(x,y)=(0,0) \iff (x e^{y}, x e^{-y})=(0,0)$$
$$\iff \begin{cases} x e^{y}=0 \\ x e^{-y}=0 \end{cases}$$

   Or $x e^{y}=0 \iff x=0 \; ou \; e^{y}=0 \iff x=0$ et $x e^{-y}=0 \iff x=0 \; ou \; e^{-y}=0 \iff x=0$

   Conclusion : les antécédents de $(0,0)$ sont les $(0,y)$ avec qcq $y \in \mathbb{R}$.

   Comme l'équation $h(X)=(0,0)$ admet une infinité de solutions la fonction h n'est pas injective.

2. Les antécédents de $(6,-6)$ sont les solutions de l'équation $h(X)=(6,-6)$.
   On résout

$$h(X)=(6,-6) \iff h(x,y)=(6,-6) \iff (x e^{y}, x e^{-y})=(6,-6)$$
$$\iff \begin{cases} x e^{y}=6 \\ x e^{-y}=6 \end{cases}$$

   On multiplie les deux équations, ainsi $x^2=-36<0$. Or $x \in \mathbb{R}$ donc c'est absurde ! ! !
   L'équation $h(X)=(6,-6)$ n'a donc pas de solution

   Conclusion : $(6,-6)$ n'a pas d'antécédent.

   Comme l'équation $h(X)=(6,-6)$ n'a pas de solution, la fonction h n'est pas surjective.

Solution de l'exercice 11 **(Énoncé)**

1. Autour de f.

   (a) On a $f(0)=0,\ f(1)=2,\ f(2)=4$.

   (b) On suppose que $f(n)=f(n')$

   $$\boxed{\text{On veut montrer : } n=n'}$$

   On a $f(n)=f(n') \Longrightarrow 2n=2n' \Longrightarrow n=n'$. Fini.

   Donc la fonction f est injective.

   (c) On résout l'équation $f(X)=1$

   $$f(X)=1 \Longleftrightarrow 2X=1 \Longleftrightarrow X=\frac{1}{2}\notin\mathbb{N}$$

   Donc l'équation $f(X)=1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$, Donc f n'est pas surjective.

2. Autour de f.

   (a) On a $g(0)=0,\ g(1)=0,\ g(2)=1,\ g(3)=1$.

   (b) On a $0\neq 1$ et $g(0)=g(1)=0$

   Donc la fonction g n'est pas injective.

   (c) Soit $b\in\mathbb{N}$. On résout l'équation $g(X)=b$

   $X=2b$ est une solution "évidente" de cette équation car $g(2b)=(2b)/2=b$

   Donc les équations $g(X)=b$ ont toujours des solutions dans $\mathbb{N}$, Donc g est surjective.

3. On a "facilement" : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ [g\circ f](n)=....=n$

   Donc $g\circ f=id_{\mathbb{N}}$.

4. On a

   $$\forall\, n\in\mathbb{N},\ [f\circ g](n)=\begin{cases}\text{Si n est pair} & =n\\ \\ \text{Si n est impair} & =n-1\end{cases}$$

   Donc $f\circ g\neq id_{\mathbb{N}}$

Solution de l'exercice 12 **(Énoncé)**

1. On peut calculer $D(f)$ Ssi la fonction f est dérivable.

   Donc $\mathscr{D}$ c'est l'ensemble des fonctions dérivables.

2. Non car les fonctions $x\longmapsto x$ et $x\longmapsto x+1$ ont la même dérivée.

   Plus généralement les fonctions f et $f+K$ ont la même dérivée.

3. On sait (mais on ne l'a pas encore démontré) que si f est une fonction continue alors elle admet des primitives.

   Donc $f\in\mathrm{Im}(D)$. Conclusion : On a bien $\mathscr{C}^0\subset\mathrm{Im}(D)$

   Justifier que $\mathscr{C}^0$ l'ensemble des fonctions continue appartient à $\mathrm{Im}(D)$ l'image de D.

4. Non il existe des fonctions qui n'ont pas de primitives.

   Par exemple la fonction "échelon" de la physique n'a pas de primitive.

   On démontrera ça plus tard car on a besoin du théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$

Solution de l'exercice 15 **(Énoncé)** Soient $f:E\to F$, $g:F\to G$ et $h:G\to H$ trois applications.
On suppose que $g\circ f$ et $h\circ g$ sont des applications bijectives.

1. On a

   $$g\circ f \text{ est bijective } \Rightarrow f \text{ est injective et } g \text{ est surjective}$$

   $$h\circ g \text{ est bijective } \Rightarrow g \text{ est injective et } h \text{ est surjective}$$

   Ainsi g est injective et surjective donc bijective.
   On notera g^{-1} la bijection réciproque.

2. On a facilement

   $$f=\left(g^{-1}\circ g\right)\circ f=g^{-1}\circ(g\circ f)$$

   Comme $g\circ f$ et g^{-1} sont bijective, on sait que $f=g^{-1}\circ(g\circ f)$ est bijective.
   On notera f^{-1} la bijection réciproque.

3. On a facilement
$$h = h \circ \left(g \circ g^{-1}\right) = \left(h \circ g\right) \circ g^{-1}$$
Comme $h \circ g$ et g^{-1} sont bijective, on sait que h est bijective.

Solution de l'exercice 16 (Énoncé)

1. Comme $g \circ f \circ g = f$ et f est injective donc g est injective.
2. On a $f = g \circ f \circ g = [f \circ g \circ f] \circ f \circ g = f \circ g \circ f \circ f \circ g$.
Cette égalité signifie que :
$$\forall e \in E,\ f(e) = [f \circ g \circ f \circ f \circ g](e) = f([g \circ f \circ f \circ g](e))$$
c'est une égalité de la forme $f(\square) = f(\square')$

On applique la définition de f injective avec $\square = e$ et $\square' = [g \circ f \circ f \circ g](e)$

Ainsi $\forall e \in E,\ e = [g \circ f \circ f \circ g](e)$
3. Comme $\forall e \in E,\ e = [g \circ f \circ f \circ g](e)$,

on a donc $g \circ f \circ f \circ g = id_E$

Ainsi $g \circ f \circ f \circ g = id_E$ et id_E est bijective donc g est surjective ! ! !

Ainsi g est surjective et injective, g est donc bijective.

On termine facilement avec $f \circ g \circ f = g$ et g bijective donc f est surjective.