TD 10 Équation Différentielle.

Jeudi 17 Novembre 2024.

Exercice 1. [Correction] On note $x, y : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifiant le système différentiel :

$$(S) \ : \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \begin{cases} x'(t) = -2\,x(t) - y(t) + \cos(t) \\ y'(t) = x(t) - 2\,y(t) + \sin(t) \end{cases}$$

On considère la fonction z définie sur $\mathbb{R}$ par $z(t) = x(t) + i\,y(t)$. On admet que z est dérivable

1. Montrer que : x, y sont solutions de $(S) \iff z$ est solution de $z' + (2-i)z = e^{it}$
2. Résoudre soigneusement l'équation différentielle d'inconnue z ci-dessus *(on veut les solutions complexes !)*.
3. En déduire les solutions x et y du système différentiel (S).

Exercice 2. [Correction] Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivables vérifiant la relation

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \quad (R)$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Vérifier que les fonctions $[x \longmapsto \cos(ax)]$ et $[x \longmapsto \cosh(ax)]$ vérifient la relation (R).
2. Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$
3. On suppose que : $f(0) = 0$.
   Montrer que f est la fonction nulle, CàD que $\forall\, t \in \mathbb{R}, \ f(t) = 0$.

On suppose dans la suite de l'exercice que $f(0) = 1$.

4. Montrer que la fonction f est paire.
5. Montrer qu'il existe λ tel que : $\forall\, t \in \mathbb{R}, f''(t) = \lambda\, f(t)$.
6. On suppose que $\lambda = a^2 > 0$. Résoudre l'équation différentielle et déterminer f.
7. On suppose que $\lambda = 0$. Résoudre l'équation différentielle et déterminer f.
8. On suppose que $\lambda = -a^2 < 0$. Résoudre l'équation différentielle et déterminer f.

Exercice 3. [Correction] Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue deux fois dérivables vérifiant l'équation différentielle

$$f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \ \text{ pour tout } x > 0 \quad et \quad f(1) = 1$$

1. Montrer que : pour tout $t > 0, \ \ t^2 f''(t) + f(t) = 0$.
2. On considère la fonction g définie par $g(u) = f(e^u)$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de g
   et montrer que g est solution de l'équation différentielle $g'' - g' + g = 0$.
   (b) Déterminer g.
3. Déterminer f.

Exercice 4. [Correction] Dans tout l'exercice, les solutions cherchées sont des fonctions à valeurs réelles.
On étudie l'équation "différentielle"

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y(-x) = x + \cos x \qquad (E)$$

1. Soit l'équation différentielle $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y(x) = \cos x \qquad (E_1)$
   (a) Vérifier que la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{2} x \sin x + \dfrac{1}{2} \cos x$ est une solution particulière de (E_1)
   (b) Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle (E_1)
   (c) Parmi les fonctions solutions (E_1), déterminer celles qui sont paires et celles qui sont impaires
2. Soit l'équation différentielle $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - y(x) = x \qquad (E_2)$
   (a) Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle (E_2)
   (b) Parmi les fonctions solutions, déterminer celles qui sont paires et celles qui sont impaires
3. Complément sur les fonctions
   (a) Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

   Montrer qu'il existe un unique couple de fonctions (u, v) telles que u soit paire, v soit impaire et $\phi = u + v$

   On prendra soin de rédiger séparément les argumentations assurant l'existence et l'unicité.
   On dit que u est la partie paire et v la partie impaire de f.
   (b) Soit u_1 et u_2 deux fonctions paires. Soit v_1 et v_2 deux fonctions impaires.

   Déduire de la question précédente que

$$u_1 + v_1 = u_2 + v_2 \Rightarrow \begin{cases} u_1 = u_2 \\ \text{ET} \\ v_1 = v_2 \end{cases}$$

4. Soit f une solution de (E), u sa partie paire et v sa partie impaire.
   (a) Vérifier que u'' est paire et que v'' est impaire
   (b) Former une équation différentielle dont u est solution, former une équation différentielle dont v est solution.
   (c) Préciser l'ensemble des solutions de (E).

Solution de l'exercice 1 **(Énoncé)**

1. On fait $\Longrightarrow$ et $\Longleftarrow$

   $\Longrightarrow$ On suppose que x, y sont solutions de (S).

   Comme $z(t) = x(t) + i\,y(t)$, on a
$$\begin{aligned} z'(t) &= x'(t) + i\,y'(t) \\ &= [-2\,x(t) - y(t) + \cos(t)] + i\,[x(t) - 2\,y(t) + \sin(t)] \\ &= x(t)[-2+i] + y(t)[-1-2i] + \cos(t) + i\sin(t) \\ &= x(t)[-2+i] + y(t)i[-2+i] + e^{it} \\ &= -(2-i)\,z(t) + e^{it} \end{aligned}$$

   Conclusion : On a bien $z' + (2-i)z = e^{it}$

   $\Longleftarrow$ On suppose que $z' + (2-i)z = e^{it}$.

   Comme $z(t) = x(t) + i\,y(t)$, on a
$$\begin{aligned} z' + (2-i)z = e^{it} &\iff \big(x'(t) + i\,y'(t)\big) + (2-i)\,(x(t) + i\,y(t)) = e^{it} \\ &\iff \big(x'(t) + 2\,x(t) + y(t)\big) + i\,\big(y'(t) - x(t) + 2\,y(t)\big) = \cos(t) + i\sin(t) \end{aligned}$$

   Les complexes sont égaux donc on peut identifier parie réelle et imaginaire

$$\text{Conclusion : } \begin{cases} x'(t) = -2\,x(t) - y(t) + \cos(t) \\ y'(t) = x(t) - 2\,y(t) + \sin(t) \end{cases}$$

2. C'est une EDL1 complète (à coef constant, CàD de la phys), ainsi z est la somme

   $>$ D'une sol part : z_0 de la forme $\forall\,t \in \mathbb{R},\ z_0(t) = K\,e^{it}$

   $>$ Des solutions homogènes, $\forall\,t \in \mathbb{R},\ h(t) = C\,e^{(2-i)t}$

3. À finir.

Solution de l'exercice 2 **(Énoncé)**

1. C'est du calcul.
2. On applique (R) avec $x = y = 0$, ainsi $2f(0) = 2f^2(0)$

   Donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$
3. On suppose que : $f(0) = 0$.

   pour tout $t \in \mathbb{R}$, on applique (R) avec $x = t$ et $y = 0$, ainsi $2f(t) = 0 \iff f(t) = 0$

   Conclusion : f est la fonction nulle.

On suppose dans la suite de l'exercice que $f(0) = 1$.

4. pour tout $t \in \mathbb{R}$, on applique (R) avec $x = 0$ et $y = t$,

   ainsi $f(t) + f(-t) = 2f(t) \iff f(-t) = f(t)$

   Conclusion : f est la fonction est paire.
5. Pour tout x, on dérive 2 fois (R) par rapport à y,

   ainsi $\forall\,x, y,\ f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y)$

   J'applique avec $x = t$ et $y = 0$, ainsi $2f''(t) = 2f(t)\,f''(0)$

   Conclusion : f est solution de l'équa diff $y'' = \lambda\,y$ avec $\lambda = f''(0)$.
6. On suppose que $\lambda = a^2 > 0$.

   On résout l'EDL2 $y'' - a^2\,y = 0$ et on trouve que $\forall\,t,\ f(t) = \alpha\,e^{at} + \beta\,e^{-at}$

   De plus on sait que

   $>$ f est paire donc $\beta = \alpha$

   $>$ $f(0) = 1$ donc $\beta = \alpha = {}^1/_2$

   Conclusion : $\forall\,t,\ f(t) = \dfrac{1}{2}\,e^{at} + \dfrac{1}{2}\,e^{-at} = \cosh(at)$
7. On suppose que $\lambda = 0$.

   On résout $f''(t) = 0$. On primitive 2 fois, ainsi $\forall\,t \in \mathbb{R},\ f(t) = \alpha\,t + \beta$

   De plus on sait que

   $>$ f est paire donc $\alpha = 0$

   $>$ $f(0) = 1$ donc $\beta = 1$

   Conclusion : $\forall\,t,\ f(t) = 1$, CàD f est la fonction constante égale à 1.
8. On suppose que $\lambda = a^{<}0$.

   On résout l'EDL2 $y'' + a^2\,y = 0$ et on trouve que $\forall\,t,\ f(t) = \alpha\,\cos(at) + \beta\,\sin(at)$

   De plus on sait que

   $>$ f est paire donc $\beta = 0$

   $>$ $f(0) = 1$ donc $\alpha = 1$

   Conclusion : $\forall\,t,\ f(t) = \cos(at)$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. On sait que $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

   $>$ On dérive cette égalité $\frac{d}{dx}[...] = \frac{d}{dx}[...]$,

   Ainsi $f''(x) = \frac{-1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$

   $>$ On applique $f'(\square) = f\left(\frac{1}{\square}\right)$ avec $\square = \frac{1}{x}$

   Ainsi $f'\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$, on a donc $f''(x) = \frac{-1}{x^2} f(x)$

   Conclusion : On a bien : $\forall\, t > 0,\ t^2 f''(t) + f(t) = 0.$

2. On considère la fonction g définie par $g(u) = f(e^u)$.

   (a) On peut calculer le nombre $g(u)$ Ssi $e^u \in D_f =]0, +\infty[$ Donc pas de problème car $e^{\square} > 0.$

   Ainsi g est def, C^0 et même C^∞ sur $\mathbb{R}$

   (b) On a $g(u) = f(e^u)$
   $\Longrightarrow g'(u) = [f(e^u)]' = e^u f'(e^u)$
   et $g''(u) = [e^u f'(e^u)]' = e^u f'(e^u) + (e^u)^2 f''(e^u)$

   On a donc

   $$A\ g''(u) + B\ g'(u) + C\ g(u) = A\ \left(e^u f'(e^u) + (e^u)^2 f''(e^u)\right) + B\ e^u f'(e^u) + C\ f(e^u)$$

   $$= A\ (e^u)^2 f''(e^u) + (A + B)\ e^u f'(e^u)\ + C\ f(e^u)$$

   Je choisis $A = 1$ et $A + B = 0$ et $C = 1$

   $$= (e^u)^2 f''(e^u) + f(e^u) = 0$$

   Car c'est l'équa diff de Q1 avec $t = e^u > 0$.

   (c) La fonction g est solution de l'équation différentielle

   $$1\ g''(u) + (-1)\ g'(u) + 1\ g(u) = 0$$

   C'est une EDL2, on sait la résoudre.

3. On sait que $f(e^u) = g(u)$, on applique avec $u = \ln x$ ainsi

   $$\forall ß, x > 0,\ f(x) = g(\ln x)$$

$\Longrightarrow$ **Attention** : *Comme la résolution est longue, on a surement fait des* $\Longrightarrow$ *donc il faut vérifier parmi les solutions trouvées, celles qui effectivement vérifient* $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ *et* $f(1) = 1$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé) Dans tout l'exercice, les solutions cherchées sont des fonctions à valeurs réelles. Cela n'interdit pas la considération de fonctions à valeurs complexes comme intermédiaire de calcul.
On étudie l'équation de type différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y(-x) = x + \cos x \qquad (E)$$

Je dis de type différentielle à cause du $f(-x)$.

1. Soit l'équation différentielle $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y(x) = \cos x \qquad (E_1)$
   (a) Facile.
   (b) Les solution de (E_1) sont la somme d'une solution particulière (cf ci dessus) et de la solution générale de l'ESSM. On trouve au final

   $$\text{Il existe } \alpha, \beta \text{ tel que } \forall x, \ y(x) = \frac{1}{2} x \sin x + \frac{1}{2} \cos x + \alpha \cos x + \beta \sin x$$

   (c) Paires-impaires

   $\rightarrow$ Une solution est paire Ssi

   $$\forall x, \quad y(-x) = \frac{1}{2}(-x)\sin(-x) + \frac{1}{2}\cos(-x) + \alpha\cos(-x) + \beta\sin(-x)$$
   $$= \frac{1}{2} x \sin x + \frac{1}{2} \cos x + \alpha \cos x - \beta \sin x$$
   $$= \ldots = y(x) = \frac{1}{2} x \sin x + \frac{1}{2} \cos x + \alpha \cos x + \beta \sin x$$

   Ssi $\beta = 0$ (le sens $\Leftarrow$ est évident, le sens $\Rightarrow$ est facile avec $x = \frac{\pi}{2}$)

   Donc y est paire et solution de $(E_1) \Leftrightarrow \exists\, \alpha$ tq
   $\forall x, \ y(x) = \frac{1}{2} x \sin x + \frac{1}{2} \cos x + \alpha \cos x$

   $\rightarrow$ Une solution est impaire Ssi

   $$\forall x, \quad y(-x) = \frac{1}{2}(-x)\sin(-x) + \frac{1}{2}\cos(-x) + \alpha\cos(-x) + \beta\sin(-x)$$
   $$= \frac{1}{2} x \sin x + \frac{1}{2} \cos x + \alpha \cos x - \beta \sin x$$
   $$= \ldots = -y(x) = -\frac{1}{2} x \sin x - \frac{1}{2} \cos x - \alpha \cos x - \beta \sin x$$

   Cette dernière égalité est impossible pour **TOUT les** x donc il n'y a pas de fonction impaire solution de (E_1)

2. Soit l'équation différentielle $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - y(x) = x \qquad (E_2)$
   (a) Les solution de (E_2) sont la somme d'une solution particulière $[x \mapsto -x]$ et de la solution générale de l'ESSM. On trouve au final

   $$\text{Il existe } \lambda, \mu \text{ tel que } \forall x, \ y(x) = -x + \lambda e^{x} + \mu e^{-x}$$

   (b) Paires-impaires

   $\rightarrow$ Une solution est paire Ssi

   $$\forall x, \quad y(-x) = -x + \lambda e^{-x} + \mu e^{+x}$$
   $$= \ldots = y(x) = x + \lambda e^{x} + \mu e^{-x}$$

   Cette dernière égalité est impossible pour **TOUT les** x donc il n'y a pas de fonction paire solution de (E_2)

$\rightarrow$ Une solution est impaire Ssi

$$\forall x, \quad y(-x) = -x + \lambda e^{-x} + \mu e^{+x}$$

$$= ... = -y(x) = -x - \lambda e^{x} - \mu e^{-x}$$

Ssi $\mu = -\lambda$ (le sens $\Leftarrow$ est évident, le sens $\Rightarrow$ est facile avec $x = 0$)

Donc y est impaire et solution de $(E_2) \Leftrightarrow \exists\, \lambda$ tq

$$\forall x,\ y(x) = -x + \lambda \left(e^{x} - e^{-x}\right)$$

3. Complément sur les fonctions
   A méditer.
4. Soit f une solution de (E), u sa partie paire et v sa partie impaire.
   (a) On sait que u est paire, ainsi $\forall\, x,\ u(-x) = u(x)$.

   On dérive deux fois cette égalité
   et on utilise $u(-x) \rightsquigarrow (-1)\ u'(-x) \rightsquigarrow (-1)(-1)\, u''(-x)$

   De même avec v.
   (b) On sait que $f''(x) + f(-x) = x + \cos x$. On écrit $f = u + v, i.e. \forall\, x,\ f(x) = u(x) + v(x)$. On a ainsi

$$\forall\, x,\ u''(x) + v''(x) + u(-x) + v(-x) = x + \cos x$$

Or u est paire et v est impaire

$$\Longrightarrow \underbrace{u''(x) + u(x)}_{\text{fonction paire}} + \underbrace{v''(x) - v(x)}_{\text{fonction impaire}} = \underbrace{x}_{\text{fonction impaire}} + \underbrace{\cos x}_{\text{fonction paire}}$$

   Donc$_{\text{En fait } \Leftrightarrow}$ on a

$$\begin{cases} u''(x) + u(x) = \cos x \\ v''(x) - v(x) = x \end{cases}$$

   (c) Conclusion : $f = u + v$ est une solution de $f''(x) + f(-x) = x + \cos x$ Ssi u est une solution paire de (E_1) et v une solution impaire de (E_2)

$$\text{Donc} \quad \begin{array}{l} \exists\, \alpha,\ \forall\, x, \quad u(x) = \frac{1}{2} x \sin x + \frac{1}{2}\cos x + \alpha \cos x \\ \text{et} \\ \exists\, \lambda,\ \forall\, x, \quad v(x) = x + \lambda\left(e^{x} - e^{-x}\right) \end{array}$$

   Ainsi Il existe α, λ tel que

$$\boxed{\begin{aligned} \forall\, x,\ f(x) &= \tfrac{1}{2} x \sin x + \tfrac{1}{2}\cos x + \alpha \cos x + x + +\lambda\left(e^{x} - e^{-x}\right) \\ &= \tfrac{1}{2} x \sin x + \tfrac{1}{2}\cos x + x + \lambda\left(e^{x} - e^{-x}\right) + +\alpha \cos x \end{aligned}}$$