# Programme de colle de la semaine 7

du Lundi 18 Novembre au Vendredi 22 Novembre.

**Questions de cours et autour du cours.**

> L'ensemble $\mathscr{P}(E)$.

Soit $E = \{1,2,3\}$. Déterminer $\mathscr{P}(E)$.

Soit $E = \{e_1, e_2 ..., e_n\}$. Soit $k \in \{0,1,2,...,n\}$.

Combien-y-a-t-il de parties dans $E_n$ qui ont exactement k éléments ?

En déduire qu'il y a exactement $2^n$ parties dans $\mathbb{E}_n$, CàD que l'ensemble $\mathscr{P}(E_n)$ contient exactement $2^n$ éléments.

> Autour de l'injectivité.

Donner la définition de l'injectivité.

Donner la définition de la fonction $f$ est croissante.

Démontrer qu'une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ strictement croissante est injective.

> Un exemple "original".

Définition de $x \in \mathbb{Q}$.

On a montrer au début de l'année que : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

*Savez vous le démontrer ?* Je ne suis pas sûr qu'il faille vérifier.

Montrer que la fonction : $f : (a,b) \longmapsto a + b\sqrt{2}$ est injective de $\mathbb{Z}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

> Propriétés de l'injectivité.

Signification de $g \circ f$

Compléter et démontrer que

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ est inj} \\ g \text{ est inj} \end{array}\right\} \Longrightarrow g \circ f \qquad et \qquad g \circ f \text{ est inj} \Longrightarrow \text{.... est inj}$$

> Définition de im(f) et la surjectivité.

Expliquer ce que signifie : "à valeurs dans $\mathscr{A}$".

Définir l'ensemble $\text{Im}(f)$.

Soit la fonction $f : x \longmapsto x + {}^1/_x$

Donner le tableau de signe/variation de la fonction $f$ et faire son graphe.

Expliquer comment on en déduit : inj, surj, bij et $\text{Im}(f)$

> Propriétés de la surjectivité.

Compléter et démontrer que

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ est surj} \\ g \text{ est surj} \end{array}\right\} \Longrightarrow g \circ f \text{ est surj} \qquad et \qquad g \circ f \text{ est surj} \Longrightarrow \text{.... est surj}$$

**Exercices.**

Même si je n'ai pas commencé le cours (et si je ne commencerai pas avant plus d'une semaine), des suites.

Rappel : On a déjà fait
> Des suite d'intégrale et de somme.
> Les suite aritmético-géo et classique d'ordre 2.
> À la mode géo.
> Le TAF.

## Un exemple "original

> Définition de $x \in \mathbb{Q}$.

On a : $x \in \mathbb{Q} \iff$ On peut écrire $x = \pm\dfrac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$

$\iff$ *Il existe* $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $x = \pm\dfrac{a}{b}$

> Démonstration de $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. On fait pas un RA

On suppose que $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ et que $a$ et $b$ ne sont pas tous les deux pairs!!!!

Comme $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b} \implies b\sqrt{2} = a \implies 2\,b^2 = a^2$

Donc $a^2$ est pair ainsi $a$ pair. (à faire, avec un RA, $n^2$ est pair ainsi $n$ pair)

On a donc $a = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$

Ainsi $2\,b^2 = a^2 \implies 2\,b^2 = (2p)^2 \implies b^2 = 2\,p^2$

Donc $b^2$ est pair ainsi $b$ pair.

Conclusion : $a$ et $b$ sont tous les deux pairs OUPS!!!!!

> Montrer que la fonction : $f : (a,b) \longmapsto a + b\sqrt{2}$ est injective de $\mathbb{Z}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Rappel : $(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \iff a \in \mathbb{Z}\ et\ n \in \mathbb{Z}$

On suppose que : $f(a,b) = f(a',b')$

$\boxed{\text{On va montrer que } a = a' \text{ et } b = b'}$

On sait que : $f(a,b) = f(a',b')$ signifie $a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2}$.

On va montrer par un RA que $b = b'$.

On suppose que $b \neq b'$.

On a ainsi $a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2} \implies \cdots \implies \sqrt{2} = \dfrac{a'-a}{b-b'}$

C'est légitime car $b - b' \neq 0$ donc $\sqrt{2} = \dfrac{a'-a}{b-b'} \in \mathbb{Q}$ OUPS

$\boxed{\text{Donc } b = b'}$

De plus on a maintenant $a + b\sqrt{2} = a' + b\sqrt{2} \implies a = a' + b\sqrt{2} - b\sqrt{2} = a'$

$\boxed{\text{Donc } a = a'}$