# DM 9. Bonus théorie des ensembles.

**Exercice 1.** [Correction] Soit $E$ un ensemble.

On va montrer que : L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est "strictement plus gros" que l'ensemble $E$
CàD : Il n'existe pas de fonction $f$ surjective de $E$ sur $\mathcal{P}(E)$.

*On sait que c'est vrai lorsque $E$ est un ensemble fini.*
*En effet : Lorsque $card(E) = n$ alors $card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$. Comme $n < 2^n$, il n'y a pas de surjection ! ! !*

Pour la démonstration générale, on fait un RA.
On suppose que $f$ est une surjection de $E$ sur $\mathcal{P}(E)$.
En considérant la partie $A$ définie par : $A = \{e \in E \text{ tel que } e \notin f(e)\}$
trouver une contradiction.

**Exercice 2.** [Correction] Soit $E$ un ensemble et $f$ est fonction de $\mathcal{P}(E)$ à valeurs dans $\mathcal{P}(E)$

On suppose que $f$ est "croissante", CàD $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2, \ [A \subset B \implies f(A) \subset f(B)]$

On considère
> $E^*$, l'ensemble des parties $A$ de $E$ tel que $A \subset f(A)$. Rq : $E^* \subset \mathcal{P}(E)$
> $X$ la réunion de tous les éléments de $E^*$

Montrer que $X$ est un "point fixe" de la fonction $f$, CàD $f(X) = X$

**Définition 1. Deux nouvô amis de $f^*$ et $f^*(A)$**

Soit $E, E'$ deux ensembles et $f : E \longrightarrow E'$ une fonction
Alors on peut définir la fonction $f^*$ de $\mathcal{P}(E)$ à valeurs dans $\mathcal{P}(E')$ de la façon suivante

>`Méthode "visuelle"`
Lorsque $A = \{a_1, a_2, .....\}$, alors $f^*(A) = \{f(a_1), f(a_2), .....\}$

> `Méthode "Rigoureuse".` Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ donc $A \subset E = \mathcal{D}_{épart}$

$b \in f^*(A) \iff$ L'eq $f(X) = b$ admet une (ou plusieurs) sol dans $E = \mathcal{D}_{épart}$
$\iff$ On peut écrire $b = f(\alpha)$ avec $\alpha \in \mathcal{D}$
$\iff$ il existe $\alpha \in E = \mathcal{D}_{épart}$ tel que $b = f(\alpha)$

**Exercice 3.** [Correction] *Pour se familiariser avec $f^*$ et $f^*(A)$*

1. Démontrer que : $A \subset B \implies f^*(A) \subset f^*(B)$, CàD $f^*$ est croissante.
2. Montrer que : $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \ f^*(A \cup B) = [f^*(A) \cup f^*(B)]$
3. Montrer que : $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \ f^*(A \cap B) \subset [f^*(A) \cap f^*(B)]$
4. **Plus difficile** Démontrer que : $f$ est injective $\iff$ $f^*$ est injective.
5. **Vraiment plus difficile** Démontrer que : $f^*$ est injective $\iff \forall A, B \in \mathcal{P}(E), \ f^*(A \cap B) = f^*(A) \cap f^*(B)$

**Exercice 4.**

On va démontrer que : *Si $B$ est un sous-ensemble de $E$, et s'il existe une fonction injective $f : E \to A$,*
*alors il existe une bijection $g : E \to A$.*

Soit $A$ un sous-ensemble de $E$ et $f : E \to A$ une fonction injective.
On note $C_0 = \mathscr{C}_E(A)$

1. Montrer que : $f$ réalise une bijection de $C_0$ sur $C_1 = f^*(C_0)$ et que $C_1 \cap C_0 = \varnothing$.
2. Montrer que : $f$ réalise une bijection de $C_1$ sur $C_2 = f^*(C_1)$ et que $C_2 \cap (C_1 \cup C_0) = \varnothing$.
3. On considère la suite $(C_n)$ de sous-ensemble de $E$ définie par $C_0 = \mathscr{C}_E(B)$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ C_{n+1} = f^*\,(C_n)$.
   Montrer que : $f$ réalise une bijection de $C_n$ sur $C_{n+1} = f^*(C_n)$ et que $C_{n+1} \cap (C_n \cup C_{n-1} \cup \ldots \cup C_0) = \varnothing$.
4. On considère $B = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} C_n$ et $B' = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n$
   Montrer que : $f$ réalise une bijection de $B$ sur $B' = f^*(C)$
5. Justifier que : $\mathscr{C}_E(B) \subset A$.
   On considère la fonction $g$ définie par : Si $e \in B$ alors $g(e) = f(e)$ et Sinon, CàD $e \notin B$, $g(e) = e$
   Vérifier que la fonction $g$ est une bijection de $E$ sur $A$
6. Application : Le théorème de Cantor/Bernstein.
   Soit $u : E \longrightarrow E'$ une injection et $v : E' \longrightarrow E$ une injection.
   $>$ Montrer que $v$ est une bijection de $E'$ dans $v^*(E')$
   $>$ Montrer que $v \circ u$ est une injection de $E$ dans $v^*(E')$
   Ainsi avec le résultat il existe une bijection de $E$ dans $v^*(E')$
   $>$ Conclusion : il existe une bijection de $E$ dans $v^*(E')$ et il existe une bijection de $v^*(E')$ sur $E'$
   Donc il existe une bijection de $E$ dans $E'$.

**Solution de l'exercice 1 (Énoncé)**

Comme $f$ est surjective de $E$ sur $\mathcal{P}(E)$ et $A \in \mathcal{P}(E)$, il existe $a \in E$ tel que $f(a) = A$

Il y a maintenant deux situation : $a \in A$ ou $a \notin A$

$\boxed{\text{Lorsque } a \in A}$

Comme $a \in A$, alors *par définition de* $A$, on a $a \notin f(a)$

Mais $f(a) = A$ donc $a \notin A$ OUPS ! ! !

$\boxed{\text{Lorsque } a \notin A}$

Comme $a \notin A$ et $f(a) = A$, alors on a $a \notin f(a)$

donc *par définition de* $A$, $a \in A$ OUPS ! ! !

**Solution de l'exercice 2 (Énoncé)** On fait $\subset$ et $\supset$

$>$ On commence par $X \subset f(X)$. Pour tout $e \in X$,

$\boxed{\text{On va montrer que } e \in f(X)}$

Comme $X$ la réunion de tous les éléments de $E^*$ et $e \in X$

donc il existe $A \in E^*$ tel que $e \in A$

Comme $A \in E^*$, on a $A \subset f(A)$.

Comme $A \in E^*$ et $X$ la réunion de tous les éléments de $E^*$, on a $A \subset X$

de plus $f$ est est "croissante" donc $f(A) \subset f(X)$

Conclusion : $e \in A \subset f(A) \subset f(X)$ Fini

$>$ Réciproquement

On vient de montrer que $X \subset f(X)$ et $f$ est "croissante"

donc $f(X) \subset f\Big(f(X)\Big)$, CàD $f(X) \in E^*$.

Or $X$ la réunion de tous les éléments de $E^*$ donc $\boxed{f(X) \subset X}$

**Solution de l'exercice 3 (Énoncé)**

1. On suppose que $A \subset B$ et $e \in f^*(A)$

$$\boxed{\text{On va montrer que : } e \in f^*(B)}$$

Comme $e \in f^*(A)$, on peut écrire $e = f(\alpha)$ avec $\alpha \in A$
Or $A \subset B$ donc $\alpha \in B$
Conclusion : on a bien $e = f(\alpha)$ avec $\alpha \in B$, CàD $e \in f^*(B)$

2. On fait $\subset$ et $\supset$.
Pas de difficulté.

3. Pour tout $A, B$. On suppose que $e \in f^*(A \cap B)$

$$\boxed{\text{On va montrer que : } e \in f^*(A) \cap f^*(B)}$$

Comme $e \in f^*(A \cap B)$, on peut écrire $e = f(\alpha)$ avec $\alpha \in A \cap B$
Comme $\alpha \in A \cap B$, on a
$\alpha \in A$, ainsi $e \in f^*(A)$
**et**
$\alpha \in B$, ainsi $e \in f^*(B)$
Conclusion : $e \in f^*(A) \cap f^*(B)$. Yes.

4. **Plus difficile** On fait $\Longrightarrow$ et $\Longleftarrow$
$\Longrightarrow$ ? On suppose que $f$ est injective et on suppose que $f^*(A) = f^*(B)$
On va montrer avec $\subset$ et $\supset$ que $A = B$

On suppose que $e \in A$
Comme $e \in A$, alors $b = f(e) \in f^*(A)$
Or $f^*(A) = f^*(B)$, donc $b \in f^*(B)$, CàD on peut écrire $b = f(\beta)$ avec $\beta \in B$
Ainsi $b = f(e) = f(\beta)$
Or $f$ est injective et $f(e) = f(\beta)$
Donc $e = \beta \in B$. Yes.

$\Longleftarrow$ ? On suppose que $f^*$ est injective et on suppose que $f(a) = f(a')$
On va montrer avec $a = a'$

Comme $f(a) = f(a')$, alors $f^*(\{a\}) = f^*(\{b\})$
Or $f^*$ est injective donc $\{a\} = \{a'\}$, CàD $a = a'$ Yes.

5. **Vraiment plus difficile** On fait $\Longrightarrow$ et $\Longleftarrow$
$\Longrightarrow$ ? On suppose que $f^*$ est injective.

$$\boxed{\text{On va montrer avec } \subset \text{ et } \supset \text{ que : } f^*(A \cap B) = f^*(A) \cap f^*(B)}$$

On sait déjà que : $f^*(A \cap B) \subset f^*(A) \cap f^*(B)$.
Voir Q3.
$\supset$? On suppose que : $e \in f^*(A) \cap f^*(B)$
On va montrer que : $e \in f^*(A \cap B)$
Comme $e \in f^*(A)$ donc On peut écrire $e = f(\alpha)$ avec $\alpha \in A$
Comme $e \in f^*(A)$ donc On peut écrire $e = f(\beta)$ avec $\beta \in B$
donc $e = f(\alpha) = f(\beta)$ et $f^*$ et injective donc $f$ est injective
Conclusion : $\alpha = \beta \in A \cap B$ donc $e \in f^*(A \cap B)$.

$\Longleftarrow$ ? On suppose que $\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ f^*(A \cap B) = f^*(A) \cap f^*(B)$.
Et que $f^*(A) = f^*(B)$
On va montrer, avec $\subset$ et $\supset$, que $A = B$

$\subset$? On suppose que : $e \in A$. *On va montrer que* $e \in B$
On a $b = f(e) \in f^*(A) = f^*(B)$ donc on peut écrire $b = f(\beta)$.
On a donc $b \in f^*(\{e\}) \cap f^*(\{\beta\})$
Ainsi $b \in f^*(\{e\} \cap \{\beta\})$
Donc $e = \beta$ car $f^*(\varnothing) = \varnothing$
Conclusion : $e = \beta \in B$ Yes
$\supset$? C'est pareil.