TD 11 Bijection.

Jeudi 21 Novembre 2024.

Fonctions numériques

Exercice 1. Soit $h : x \longmapsto \dfrac{x^2+1}{x}$.

1. Étudier la fonction h et faire son graphe.
2. La fonction h est-elle injective ? surjective ? Déterminer $\text{Im}(h)$.
3. Déterminer $\mathscr{D}_0$ et $\mathscr{A}_0$ tel que la fonction h réalise une bijection de $\mathscr{D}_0$ sur $\mathscr{A}_0$.

   Déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 2. [Correction] Soit $\tanh : x \longmapsto \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Montrer que la fonction $\tanh$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à déterminer.

Déterminer sa bijection réciproque.

Bijection sans trop de calcul.

Exercice 3. Lire l'exo et passer si c'est trop bizarre.

On considère les opérateurs R et S, définie par pour toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on pose

$>$ $R(f) = f(x+1)$, CàD $R(f)$ c'est la fonction $x \longmapsto f(x+1)$.

$>$ $S(f) = f(x-1)$, CàD $S(f)$ c'est la fonction $x \longmapsto f(x-1)$.

1. Calculer l'image du polynôme X^2+X+1, CàD calculer $R(X^2+X+1)$
2. Montrer que : $R \circ S = id$ et $S \circ R = id$

Conclusion : R réalise une bijection de ...... sur ...... et S est sa bij réciproque.

Exercice 4. [Correction] Soit f, g, h trois fonctions composables.

On suppose que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont des fonctions bijectives.

1. Justifier sans calcul que g est bijective. On notera g^{-1} la bijection réciproque.
2. Exprimer f à l'aide de deux fonctions bijectives.

   Ainsi f est bijective.
3. Montrer que h est bijective.

Exercice 5. Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : F \to E$ trois fonctions.

On suppose que : $f \circ h \circ g$ est une fonctions surjective et que $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ sont des fonctions injectives.

Montrer que f, g et h sont bijectives.

Exercice 6. [Correction] Soient f, g deux fonction de E à valeurs dans E.

On suppose que :

> $f \circ g \circ f = g$ et $g \circ f \circ g = f$

> f est injective.

1. Justifier que : g est injective
2. Montrer que : $f \circ g \circ f \circ g \circ f \circ g = f$.
   En déduire que $\forall\, e \in E,\ [g \circ f \circ g \circ f \circ g](e) = e$.
3. En déduire que g et f sont bijectives.

Un exemple dans $\mathbb{R}^2$

Exercice 7. [Correction] Soit la fonction h de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$h(x, y) = (x\, e^{y}, x\, e^{-y}).$$

1. Justifie que $(0, 0)$ admet plusieurs antécédents. Que peut-on conclure ?
2. Justifier que $(-6, 6)$ n'a pas d'antécédent par h. Que peut-on conclure ?
3. Bonus Trouver des conditions sur a et b pour que (a, b) ait un/des antécédents. Que peut-on conclure ?

Un exo Bonus

Exercice 8. On considère A et B deux parties non vides d'un ensemble E.

On considère la fonction f de $\mathscr{P}(E)$ à valeurs dans $\mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$ définie par

$$\forall\, X \in \mathscr{P}(E), \quad f(X) = (X \cap A, X \cap B)$$

1. Calculer $f(E),\ f(A),\ f(B),\ et\ f(\varnothing)$.
2. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
3. Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.
4. Dans le cas où f est bijective, expliciter f^{-1} la bijection réciproque.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. La fonction $\tanh$ est dérivable sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

   De plus $\forall x \in \mathscr{D},\ f'(x) = \cdots = \dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0$, D'où le tableau

x	$-\infty$	∞
$\tanh'(x)$	$+$	
$\tanh(x)$	-1	1

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \underset{x \to \infty}{\sim} = \frac{e^x}{e^{-x}} = 1 \xrightarrow[x \to \infty]{} 1$$

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \underset{x \to \infty}{\sim} = \frac{-e^x}{e^{-x}} = -1 \xrightarrow[x \to \infty]{} -1$$

   La fonction $\tanh$ est continue et strictement croissante

   ainsi elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un $]-1, 1[$.

2. On utilise $\tanh(x) = y \iff \cdots \iff x = \tanh^{-1}(y)$

   Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]-1, 1[$

$$\begin{aligned}
\tanh(x) = y &\iff \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y \\
&\iff \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = y \\
&\iff \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = y \\
&\iff e^{2x} - 1 = y(e^{2x} + 1) \\
&\iff e^{2x}(1 - y) = y + 1 \\
&\iff e^{2x} = \frac{y+1}{1-y} \quad \textit{car } y \in]-1, 1[\textit{ donc } 1 - y \neq 0 \\
&\iff 2x = \ln\left(\frac{y+1}{1-y}\right) \quad \textit{car } y \in]-1, 1[\textit{ donc } \frac{y+1}{1-y} > 0
\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall\, y \in]-1, 1[,\ \tanh^{-1}(y) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé) Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois applications.
On suppose que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont des applications bijectives.

1. On a

   $g \circ f$ est bijective $\Rightarrow f$ est injective et g est surjective

   $h \circ g$ est bijective $\Rightarrow g$ est injective et h est surjective

   Ainsi g est injective et surjective donc bijective.
   On notera g^{-1} la bijection réciproque.

2. On a facilement

$$f = g^{-1} \circ (g \circ f) = g^{-1} \circ g \circ f$$

   Comme $g \circ f$ et g^{-1} sont bijective, on sait que $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ est bijective.
   On notera f^{-1} la bijection réciproque.

3. On a facilement

$$h = h \circ \left(g \circ g^{-1}\right) = (h \circ g) \circ g^{-1}$$

   Comme $h \circ g$ et g^{-1} sont bijective, on sait que h est bijective.

Solution de l'exercice 6 (Énoncé)

1. Comme $g \circ f \circ g = f$ et f est injective donc g est injective.
2. On a $f = g \circ f \circ g = [f \circ g \circ f] \circ f \circ g = f \circ g \circ f \circ f \circ g$.
   Cette égalité signifie que :

   $$\forall\, e \in E,\ f(e) = [f \circ g \circ f \circ f \circ g](e) = f([g \circ f \circ f \circ g](e))$$

   c'est une égalité de la forme $f(\Box) = f(\Box')$

   On applique la définition de f injective avec $\Box = e$ et $\Box' = [g \circ f \circ f \circ g](e)$

   Ainsi $\forall\, e \in E,\ e = [g \circ f \circ f \circ g](e)$
3. Comme $\forall\, e \in E,\ e = [g \circ f \circ f \circ g](e)$,

   on a donc $g \circ f \circ f \circ g = id_E$

   Ainsi $g \circ f \circ f \circ g = id_E$ et id_E est bijective donc g est surjective ! ! !

   Ainsi g est surjective et injective, g est donc bijective.

   On termine facilement avec $f \circ g \circ f = g$ et g bijective donc f est surjective.

Solution de l'exercice 7 (Énoncé)

1. Les antécédents de $(0,0)$ sont les solutions de l'équation $h(X,Y) = (0,0)$.
   On résout

   $$h(X,Y) = (0,0) \iff h(x,y) = (0,0) \iff (x\,e^{y}, x\,e^{-y}) = (0,0)$$
   $$\iff \begin{cases} x\,e^{y} = 0 \\ x\,e^{-y} = 0 \end{cases}$$

   Or $x\,e^{y} = 0 \iff x = 0 \text{ ou } e^{y} = 0 \iff x = 0$ et $x\,e^{-y} = 0 \iff x = 0 \text{ ou } e^{-y} = 0 \iff x = 0$

   Conclusion : les antécédents de $(0,0)$ sont les $(0,y)$ avec qcq $y \in \mathbb{R}$.

   Comme l'équation $h(X) = (0,0)$ admet une infinité de solutions la fonction h n'est pas injective.
2. Les antécédents de $(6,-6)$ sont les solutions de l'équation $h(X) = (6,-6)$.
   On résout

   $$h(X) = (6,-6) \iff h(x,y) = (6,-6) \iff (x\,e^{y}, x\,e^{-y}) = (6,-6)$$
   $$\iff \begin{cases} x\,e^{y} = 6 \\ x\,e^{-y} = 6 \end{cases}$$

   On multiplie les deux équations, ainsi $x^2 = -36 < 0$. Or $x \in \mathbb{R}$ donc c'est absurde ! ! !
   L'équation $h(X) = (6,-6)$ n'a donc pas de solution

   Conclusion : $(6,-6)$ n'a pas d'antécédent.

   Comme l'équation $h(X) = (6,-6)$ n'a pas de solution, la fonction h n'est pas surjective.