# DM 8. Équation différentielle.

**Exercice 1.** [Correction] On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E)$ .

$$y' + y - y^2 = 0 \qquad (E)$$

On suppose que la fonction $y$ est une solution de $(E)$ et on suppose que la fonction $y$ ne s'annule pas.
On considère sur $\mathbb{R}$ la fonction $z$ par la formule

$$z(x) = \frac{1}{y(x)}$$

1. Déterminer l'équation $(E')$ vérifiée par la fonction $z$.
2. Déterminer $z(x)$ puis $y(x)$ .

**Exercice 2.** [Correction] Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la relation

$$\forall\, x, y \in \left]0, +\infty\right[, \quad f(x\,y) = x f(y) + y\, f(x) \quad (E)$$

1. Calculer les valeurs possible de $f(1)$.
2. On suppose que $f$ est continue et dérivable sur $\left]0, +\infty\right[$ et vérifie la relation $(E)$
   (a) Démontrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall\, t \in \left]0, +\infty\right[, \quad t\, f'(t) - f(t) = \alpha\, t$
   (b) Résoudre cette équation différentielle sur $\mathscr{D} = \left]0, +\infty\right[$
   (c) Trouver parmi les solutions de l'équation différentielle, les fonctions $f$ qui sont solutions du problème.
3. On suppose que $f$ est seulement continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie la relation $(E)$
   Comme la fonction $f$ est continue alors elle admet des primitives.
   On note $H$ l'une d'elle.

   En primitivant $(E)$, montrer que $f$, CàD $f(t)$, s'exprime fonction de $H$.

   En déduire que la fonction $f$ est dérivable, ainsi les conclusions de la question Q2c. restent valides.
4. Bonus On revient au contexte de la question Q2. Pour tout $a \in \mathscr{D}$ et $h \in \mathbb{R}$
   En utilisant $(E)$, calculer $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$. En déduire que : $f'(a) = f(1) + \dfrac{f(a)}{a}$

**Exercice 3.** [Correction] Le but de l'exercice est de trouver les solutions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ de l'équation

$(E)\ :\ y^{(3)} = y$ Rappel : $y^{(3)} = y'''$, c'est la dérivée 3-ième de la fonction $y$

1. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ de l'équation
   $$(F)\ :\ y' = y$$
2. Montrer que $f$ est solution de $(E)$ si et seulement si $g = f'' + f' + f$ est solution de $(F)$.
   *Avertissement : On fera bien les implications $\Longrightarrow$ et $\Longleftarrow$*
3. En déduire l'ensemble des solutions de $(E)$
   *Remarque : Comme $g = f'' + f' + f$ est une solution de $(F)$,*
   *on doit résoudre l'équation différentielle : $f'' + f' + f =$Sol de la question Q1*

# Un exercice difficile pour public intéressé

`À faire seul ou à plusieurs. À rendre si et quand vous le voulez`

**Définition 1. La partie entière de $x$.**
Soit $x$ un réel. Alors il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que : $n \underset{\text{Large}}{\leqslant} x \underset{\text{Strict}}{<} n+1$

On le note $\lfloor x \rfloor$

Propriétés.
> Lorsque $n = \lfloor x \rfloor$ alors $n \leqslant x < n+1$ et $x - 1 < n \leqslant x$
> Le plus grand entier $p$ tel que $p \leqslant x$, c'est $p = \lfloor x \rfloor$
> Le plus petit entier $p$ tel que $x < p$, c'est $p = \lfloor x \rfloor + 1$
> On a aussi

$$\left.\begin{array}{l} n \text{ est un entier} \\ \\ n \leqslant \square < n+1 \end{array}\right\} \iff n = \lfloor \square \rfloor$$

**Exercice 4.** [Correction] théorème de Beatty.

Si $E$ est un ensemble fini, on note $\mathrm{Card}(E)$ le nombre d'éléments de $E$, appelé son cardinal.
Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, on note $E_a = \{\lfloor na \rfloor, n \in \mathbb{N}^*\}$.
On dit que deux parties non vides $A$ et $B$ de $\mathbb{N}^*$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$ si :

i) $A \cap B = \varnothing$, c'est-à-dire si $A$ et $B$ n'ont aucun élément en commun.
ii) $A \cup B = \mathbb{N}^*$.

Autrement dit, si et seulement si tout élément $n$ de $\mathbb{N}^*$ appartient à un et un seul des deux ensembles $A$ et $B$.

1. Un exemple. On considère $a = 1,6180339887$ et $b = 2,6180339887$
   > Écrire (ou pas) un fonction python qui prend comme argument un nombre $\alpha$ et renvoie $E_\alpha$.
   > En déduire que $E_a = \{1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 29, ....\}$
   et que $E_b = \{2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 20, 23, 26, 28, 31, 34, 36, 39, 41, 44, 47, ....\}$.
   > Ainsi il semble que $E_a$ et $E_b$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$. (Explication à la dernière question)
2. Soit $a \in ]1, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère : $u_n(a) = \mathrm{Card}\left(\{p \in E_a \mid p \leqslant n\}\right) = \mathrm{Card}\left(\llbracket 1, n \rrbracket \cap E_a\right)$
   (a) Justifier que si $k, k'$ sont deux entiers naturels avec $k < k'$, alors $\lfloor ka \rfloor < \lfloor k'a \rfloor$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le plus grand entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $\lfloor pa \rfloor \leqslant n$ vérifie $\dfrac{n+1}{a} - 1 \leqslant p < \dfrac{n+1}{a}$.
   (c) En utilisant les deux questions précédentes, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n+1}{a} - 1 \leqslant u_n(a) < \dfrac{n+1}{a}$.
   (d) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n(a)}{n}$ existe et calculer sa valeur.
3. Dans cette question, on suppose que $p$ et $q$ sont deux réels de $]1, +\infty[$ tels que $E_p$ et $E_q$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$.
   (a) Prouver que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
   (b) Montrer que $\dfrac{p}{q}$ est irrationnel. En déduire que $p$ et $q$ sont irrationnels.
4. On suppose à présent que $p$ et $q$ sont deux réels strictement positifs vérifiant $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, avec $p$ irrationnel.
   On souhaite prouver qu'alors $E_p$ et $E_q$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$.
   (a) Justifier que $p > 1$ et que $q$ est également irrationnel.
   (b) On fait un RA.
   On suppose que $E_p \cap E_q \neq \varnothing$, CàD $i \in E_p \cap E_q$ ainsi il existe $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $i = \lfloor np \rfloor = \lfloor mq \rfloor$.
   Prouver que $m + n - 1 < i < m + n$ et aboutir à une contradiction.
   (c) Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On note alors $k = \left\lfloor {}^{i}/_{p} \right\rfloor$ et $j = \left\lfloor {}^{i}/_{q} \right\rfloor$.
      i. On suppose que $i \notin E_p$. Montrer que $kp < i < kp + p - 1$.
      ii. On suppose $i \notin E_p \cup E_q$. Montrer que $k + j < i < k + j + 1$.
      iii. En déduire que $E_p \cup E_q = \mathbb{N}^*$.
   Le résultat que l'on vient de démontrer s'appelle le théorème de Beatty : Soient $p$ et $q$ strictement plus grands $1$
   Alors $E_p$ et $E_q$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$ si et seulement si $p$ est irrationnel et ${}^1/_p + {}^1/_q = 1$.
5. Le nombre d'or
   (a) Justifier que l'équation $x^2 = x + 1$ possède une unique solution strictement positive $\phi$, que l'on déterminera.
   (b) Prouver que $\phi$ est irrationnel, puis que $E_\phi$ et $E_{\phi^2}$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$.
   *Explication de la question Q1 : $a = \phi = 1,61803398875...$ et $b = \phi^2 = 2,618033988750235...$*

**Solution de l'exercice 1** **(Énoncé)** On suppose que la fonction $y$ est solution de l'équation différentielle

$$y' + y = y^2.$$

Remarque : Il y a $y^2$ donc l'équation différentielle n'est pas linéaire et Donc le théories classiques ne s'appliquent pas.

1. On suppose que la fonction $y$ ne s'annule pas sur $\mathfrak{D}$.
   On considère la fonction $z$ définie par $z\left(x\right) = \dfrac{1}{y\left(x\right)}$ *qui forcément ne s'annule pas*

   On a $z\left(x\right) = \dfrac{1}{y\left(x\right)}$

   comme la fonction y ne s'annule pas sur $\mathfrak{D}$

   La fonction $z$ est bien définie et ne s'annule pas sur $\mathfrak{D}$

   $\Longrightarrow$ On a donc $y\left(x\right) = \dfrac{1}{z\left(x\right)}$ et $y'\left(x\right) = \left[y\left(x\right)\right]' = \left[\frac{1}{z(x)}\right]' = \frac{-z'(x)}{[z(x)]^2}$

   Comme : $y'\left(x\right) + y\left(x\right) = \left[y\left(x\right)\right]^2$

   On remplace $y\left(x\right)$ et $y'\left(x\right)$

   $$\Longrightarrow \frac{-z'\left(x\right)}{\left[z\left(x\right)\right]^2} + \frac{1}{z\left(x\right)} = \left[\frac{1}{z\left(x\right)}\right]^2$$

   $$\Longrightarrow -z'\left(x\right) + z\left(x\right) = 1 \text{ car } z(x) \text{ est tjs} \neq 0$$

2. La fonction $z$ est solution d'une EDL1 complète *de la physique*
   Ainsi $z$ est la somme

   $>$ D'une solution particulière constante (à cause de la physique). On trouve $\forall\, x \in \mathbb{R},\ y_0(x) = 1$

   $>$ Des solutions de l'équation homogène, on trouve $\forall\, x \in \mathbb{R},\ h(x) = K\, e^x$

   Conclusion : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ z(x) = 1 + K\, e^x$

   Pour en déduit que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ y(x) = \dfrac{1}{z(x)} = \dfrac{1}{1 + K\, e^x}$ *avec* $K > 0$ *car on ne divise pas par* $0$.

   Normalement on devrait synthétiser CàD vérifier que les fonctions ci-dessus conviennent

**Solution de l'exercice 2** **(Énoncé)** Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la relation

$$\forall x, y \in \left]0,+\infty\right[, \quad f(x\,y) = xf(y) + y\,f(x) \quad (E)$$

1. J'applique l'égalité avec $x = y = 1$

$$\text{Ainsi } f(1) = f(1) + f(1) \implies f(1) = 0$$

2. On suppose que $f$ est continue et dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ et vérifie la relation $(E)$

   (a) On note $\alpha = f'(1)$.
   Je fixe $y$ et je dérive l'égalité en $x$

$$\text{Ainsi } \frac{d}{dx}\left[f(x\,y)\right] = \frac{d}{dx}\left[xf(y) + y\,f(x)\right] \implies y\,f'(x\,y) = f(y) + y\,f'(x)$$

   On applique cette égalité avec $x = 1$ et $y = t$, ainsi

$$t\,f'(t) = f(t) + t\,f'(1)$$

$$\text{On a bien } t\,f'(t) - f(t) = \alpha t$$

   (b) On se place sur $\mathscr{D} = \left]0,+\infty\right[$
   On résout l'équation homogène puis on fait la méthode de variation de la constante,
   ainsi on trouve : $\forall\, t > 0,\ f(t) = \alpha t \ln t + kt$

   (c) On sait de plus que si $f$ est solution, alors $f(1) = 0$ ainsi forcément $K = 0$

| |
|---|
| On a montrer que : **SI** la fonction $f$ vérifie la relation $(E)$ <br> **Alors forcément** on doit avoir $f(t) = \alpha t \ln t$ |

   On va *synthétisé*, CàD vérifier que ces fonctions qui vérifie effectivement $(E)$

$$\text{Pour tout x,y} \quad f(x\,y) = \alpha\,x\,y \ln(x\,y) = \alpha\,x\,y\ln(x) + \alpha\,x\,y\ln(y) = xf(y) + yf(x)$$

   Conclusion : les fonctions trouvées conviennent effectivement

3. On suppose que $f$ est seulement continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie la relation $(E)$

   $>$ Comme $f$ est continue sur $]0,+\infty[$, elle admet, sur $]0,+\infty[$, des primitives. Soit $H$ l'une d'elle.
   On primitive $f(x\,y) = xf(y) + yf(x)$ par rapport à $x$, ainsi

$$\frac{1}{y}H(x\,y) = \frac{x^2}{2}f(y) + yH(x) + K$$

   *On applique avec* $y = t$ *et* $x = 1$,

$$\textit{ainsi } \forall\, t > 0,\ f(t) = 2\left[\frac{H(t)}{t} - tH(1) - K\right]$$

   $>$ Conclusion $f$ s'exprime avec des fonctions dérivables et les opérations classique
   donc $f$ est dérivable.

4. Pour tout $a > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{f\left(a\left[1 + {}^{h}/_{a}\right]\right) - f(a)}{h} \\
&= \frac{\left[af(1 + {}^{h}/_{a}) + f(a)(1 + {}^{h}/_{a})\right] - f(a)}{h} \\
&= a\frac{f\left(1 + {}^{h}/_{a}\right)}{h} + \frac{f(a)}{a} \\
&= \frac{f\left(1 + {}^{h}/_{a}\right) - f(1)}{{}^{h}/_{a}} + \frac{f(a)}{a} \\
&= \frac{f(1 + \square) - f(1)}{\square} + \frac{f(a)}{a}
\end{aligned}$$

Comme $f$ est dérivable, on a : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$
et $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f\left(1+\square\right)-f(1)}{\square} + \dfrac{f(a)}{a} = f'(1) + \dfrac{f(a)}{a}$

Conclusion : $\forall\, a > 0,\ f'(a) = f(1) + \dfrac{f(a)}{a}$,
CàD $f$ est solution de l'équa diff $y' = \dfrac{y}{t} + \alpha$ avec $\alpha = f'(1)$

**Solution de l'exercice 3 (Énoncé)**

1. C'est une EDL 1 homogène
   Comme une primitive de $a(x) = -1$ est $A(X) = -x$, on a sait que
   $$\forall\, x \in \mathbb{R},\ y(x) = K\, e^{-x}$$
2. On fait $\implies$ et $\impliedby$

   $\implies$ ?

   On suppose que $f''' = f$. On note $g = f'' + f' + f$
   $$\textit{On a } g' - g = \big(f'' + f' + f\big)' - \big(f'' + f' + f\big) = \cdots = f''' - f = 0$$
   Donc $g$ est bien sol de $(F)$

   $\impliedby$ ?

   On suppose que $g' - g = 0$.
   $$\begin{aligned}\textit{On a } f''' - f &= f''' + f'' + f' - f'' - f' - f \\ &= -\big(f'' + f' + f\big)' - \big(f'' + f' + f\big) \\ &= g' - g = 0\end{aligned}$$
   Donc $f$ est bien sol de $(E)$
3. On vient de démontrer que
   $$f''' = f \iff \begin{cases} f'' + f' + f = g \\ \textit{et} \\ g' = g \end{cases}$$

   $>$ On résout $g' = g$ avec la théorie des EDL 1, ainsi on a $\forall\, x \in \mathbb{R},\ g(x) = Ke^{t}$

   $>$ On résout $f'' + f' + f = g = Ke^{t}$.

   La théorie des EDL 2, on sait que $f$ est somme d'une sol part $f_p$ et des sol homo $h$
   $>$ On résout $f'' + f' + f = g = Ke^{t}$. La théorie des EDL 2, on sait que $f$ est somme d'une sol part $f_p$ et des sol homo $h$

   –> Sol Homo : Comme les racine de l'eq caract sont $r = \dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $r' = \overline{r} = \dfrac{-1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, on a
   $$\forall\, t \in \mathbb{R},\ h(t) = A\, e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B\, e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

   –> Sol Part : Comme 2-ième membre est égale à $K\exp(t)$, on cherche $y_p$ de la forme $y_p(x) = \lambda \exp(t)$
   On trouve que
   $$\begin{aligned} &y_p'' + y_p' + y_p = g = Ke^{t} \\ &\iff \lambda\, \exp(t) + \lambda\, \exp(t) + \lambda\, \exp(t) = K \exp(t) \\ &\iff \lambda = \frac{K}{3}\end{aligned}$$
   Ainsi : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ y_p(x) = \dfrac{K}{3}\exp(t)$ convient

   ***Conclusion*** : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ y(x) = y_p(x) + h(x)$
   $$\begin{aligned} &= \frac{K}{3}\exp(t) + A\, e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B\, e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ &= \alpha\, \exp(t) + \beta\, e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \gamma\, e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\end{aligned}$$

**Solution de l'exercice 4 (Énoncé)**

1. (a) Soient donc $k, k'$ deux entiers distincts avec $k < k'$, ainsi $k' \geqslant k+1$. On a alors

$$\lfloor k'a \rfloor > k'a - 1 \geqslant (k+1)a - 1 \geqslant ka + (a-1) \geqslant ka \geqslant \lfloor ka \rfloor$$

Et donc on a bien $\lfloor k'a \rfloor > \lfloor ka \rfloor$, si bien que ces deux entiers sont distincts.

(b) Nous savons que : pour $p \in \mathbb{N}$,.

$\lfloor pa \rfloor \leqslant n \iff pa < n+1 \iff p < \dfrac{n+1}{a}$.

De plus comme $p$ est le plus grand des tels entiers, on a : $\dfrac{n+1}{a} - 1 \leqslant p$.

car l'intervalle $\left[\dfrac{n+1}{a} - 1, \dfrac{n+1}{a}\right[$ est un intervalle de longueur 1.

(c) Puisque les $\lfloor pa \rfloor$, pour $p \in \mathbb{N}^*$ sont deux à deux distincts,

il s'agit de compter le nombre de $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $\lfloor pa \rfloor \leqslant n \iff pa < n+1$.

Autrement dit, $u_n(a) = \mathrm{Card}\,\{p \in \mathbb{N}^* \mid \lfloor pa \rfloor \leqslant n\}$

Mais si on note $p_0$ le plus grand des tels $p$, on a donc $\{p \in \mathbb{N}^* \mid \lfloor pa \rfloor \leqslant n\} = [\![1, p_0]\!]$, qui est donc de cardinal $p_0$.

Et donc en utilisant la caractérisation de $p_0$ obtenue à la question précédente,

il vient bien $\dfrac{n+1}{a} - 1 \leqslant u_n(a) < \dfrac{n+1}{a}$.

(d) On a donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \frac{n+1}{na} - \frac{1}{n} \leqslant \frac{u_n(a)}{n} < \frac{n+1}{na} \iff \frac{1}{a} + \frac{1}{na} - \frac{1}{n} \leqslant \frac{u_n(a)}{n} < \frac{1}{a} + \frac{1}{na}$$

Le théorème des 2 gendarmes assure que : $u_n(a) \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{a}$

2. (a) Lorsque $E_p$ et $E_q$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$[\![1, n]\!] = [\![1, n]\!] \cap \mathbb{N}^* = ([\![1, n]\!] \cap E_p) \cup ([\![1, n]\!] \cap E_q)$$

et ces deux ensembles sont disjoints. On a donc

$$n = \mathrm{Card}([\![1, n]\!]) = \mathrm{Card}\,([\![1, n]\!] \cap E_p) + \mathrm{Card}\,([\![1, n]\!] \cap E_q) = u_n(p) + u_n(q).$$

Et donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 1 = \dfrac{u_n(p)}{n} + \dfrac{u_n(q)}{n}$, si bien que par passage à la limite, $1 = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$.

(b) On fait un RA.

Si l'un des deux nombres $p$ et $q$ était rationnel, disons $p$,

alors on aurait $\dfrac{1}{p} = 1 - \dfrac{1}{q} = \dfrac{q-1}{q}$ et donc $p = \dfrac{q}{q-1} \in \mathbb{Q}$.

Ainsi la fraction $\dfrac{p}{q}$ est rationnel, CàD $\dfrac{p}{q} = \dfrac{a}{b}$, avec $a, b$ entiers.

Alors $bp = qa$, et donc $n = \lfloor bp \rfloor = \lfloor qa \rfloor \in E_p \cap E_q$,

Oups car $E_p \cap E_q = \varnothing$.

Conclusion : $p$ et $q$ sont tous deux irrationnels.

3. (a) On a $\dfrac{1}{p} = 1 - \dfrac{1}{q} < 1$, et donc $p > 1$.

On fait un RA. On suppose que $q$ soit rationnel.

Alors $\dfrac{1}{p} = 1 - \dfrac{1}{q}$ est rationnel, et donc $p$ est également rationnel

Ceci est absurde puisqu'on a supposé $p$ irrationnel, et donc $q$ est irrationnel.

(b) Puisque $i = \lfloor np \rfloor$, alors $i \leqslant np < i+1$

Notons que la première inégalité ne peut être une égalité

car si on avait $np = i$, alors $p = \dfrac{i}{n}$ serait rationnel. Ainsi

$$i < np < i+1 \iff np - 1 < i < np \iff n - \frac{1}{p} < \frac{i}{p} < n$$

De même, $m - \dfrac{1}{q} < \dfrac{i}{q} < m$.

Et donc en ajoutant ces deux inégalités, il vient $m + n - \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} < i\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}\right) < m + n$.

Or on sait que : $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, donc on a bien $m + n - 1 < i < m + n$.

Mais alors $i$ est un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs, ce qui est impossible.

Conclusion : $E_p \cap E_q = \varnothing$.

(c) i. On a, par définition de la partie entière, $k \leqslant \dfrac{i}{p} < k+1 \iff kp \leqslant i < kp+p$.

De plis comme $p$ est irrationnel et $k$ et $i$ entiers, $i \neq kp$, et donc $kp < i$.

Pour la seconde inégalité, On fait un RA. On suppose que $kp+p-1 \leqslant i$

ainsi $kp+p-1 \leqslant i < kp+p$, soit encore $i < kp+p < i+1$.

De plus $i$ est un entier

Donc $i = \lfloor kp+p \rfloor = \lfloor (k+1)p \rfloor$ et $i \in E_p$ OUPS

Conclusion : on a bien $kp < i < kp+p-1$

ii. L'inégalé précédente s'écrit encore $k < \dfrac{i}{p} < i+1-\dfrac{1}{p}$.

Sur le même principe, on a $j < \dfrac{i}{q} < j+1-\dfrac{1}{q}$

Et donc en sommant les inégalités ainsi obtenues, il vient

$$k+j < i\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right) < k+j+2-\frac{1}{p}-\frac{1}{q} \iff k+j < i < k+j+1.$$

Et ceci est absurde car cela signifierait que $i$ est un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs.

iii. De ce qui précède, on déduit que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ est soit dans $E_p$, soit dans $E_q$.

Autrement dit, $\mathbb{N}^* = E_p \cup E_q$.

Puisque nous avons déjà prouvé que ces ensembles sont disjoints, on en déduit que $E_p$ et $E_q$ forment bien une partition de $\mathbb{N}^*$.

4. (a) Comme $\Delta = 1+4 = 5 > 0$, l'équation possède donc deux solutions réelles qui sont $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Puisque $\sqrt{5} > 1$, cette seconde solution est évidemment négative

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ est la seule solution positive de l'équation.}$$

(b) Pour prouver que $E_\phi$ et $E_{\phi^2}$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$, appliquons le théorème de Beatty

Puisque $\phi$ est irrationnel, il suffit donc de prouver que $\dfrac{1}{\phi}+\dfrac{1}{\phi^2} = 1$.

$$\text{Or } \phi^2 = \phi+1, \text{ donc } \frac{1}{\phi}+\frac{1}{\phi^2} = \frac{1}{\phi}+\frac{1}{\phi+1} = \frac{(\phi+1)+\phi}{\phi(\phi+1)} = \frac{2\phi+1}{\phi^2+\phi} = \frac{2\phi+1}{(\phi+1)+\phi} = 1.$$

Et donc $E_\phi$ et $E_{\phi^2}$ forment bien une partition de $\mathbb{N}^*$.