

<b>Relation(s).</b>		<b>2 Relation d'équivalence.</b>	<b>2</b>
<b>1 Relation binaire.</b>	<b>1</b>	<b>3 Relation d'ordre.</b>	<b>4</b>

## 1 Relation binaire.

### Définition 1. Relation binaire.

On appelle relation binaire  $\mathcal{R}$  sur  $E$ ,  
toute propriété vraie pour certain couples  $(x, y)$  d'éléments de  $E$  et fausse pour les autres.  
Lorsqu'un couple  $(x, y)$  vérifie la relation  $\mathcal{R}$ ,  
on écrit  $x\mathcal{R}y$  et on dit que :  $x$  est en relation avec  $y$ .

*Vocabulaire sur les relations.*

Soit  $\mathcal{R}$  une relation binaire sur une ensemble  $E$ .

> On dit que  $\mathcal{R}$  est réflexive Ssi  $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$

> On dit que  $\mathcal{R}$  est transitive Ssi

$$\forall (x, y, z) \in E^3, [x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z] \implies x\mathcal{R}z$$

> On dit que  $\mathcal{R}$  est symétrique Ssi

$$\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$$

> On dit que  $\mathcal{R}$  est antisymétrique Ssi

$$\forall (x, y) \in E^2, [x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x] \implies x = y$$

### Exemples

Sur  $E = \{ \text{les élèves de CPGE à C.Vernet} \}$ , on considère la relation 'sont dans la même classe (en math)'

CàD l'élève  $x$  et l'élève  $y$  sont en relation  
Ssi ils suivent le même cours de math.

C'est une relation binaire sur  $E$ .

Elle est réflexive, transitive, symétrique, ~~antisymétrique~~

> Sur  $E = \mathbb{R}$ , on considère la relation  $\leq$

$$\text{CàD } x\mathcal{R}y \iff x \leq y$$

C'est une relation binaire sur  $\mathbb{R}$ .

Elle est réflexive, transitive, ~~symétrique~~, antisymétrique

> Sur  $E = \mathbb{R}$ , on considère la relation  $>$

$$\text{CàD } x\mathcal{R}y \iff x > y$$

C'est une relation binaire sur  $\mathbb{R}$ .

Elle est ~~réflexive~~, transitive, ~~symétrique~~, ~~antisymétrique~~

> Sur  $E$  l'ensemble des droites du Plan, on considère la relation  $//$ , est parallèle à

$$\text{CàD } D\mathcal{R}D' \iff D // D'$$

C'est une relation binaire sur  $E$ .  
Elle est réflexive, transitive, symétrique.

> Sur  $E$  l'ensemble des droites du Plan, on considère la relation  $\perp$ , est perpendiculaire à

$$\text{CàD } D \mathcal{R} D' \iff D \perp D'$$

C'est une relation binaire sur  $E$ .  
Elle est seulement symétrique.

## 2 Relation d'équivalence.

### Définition 2. Relation d'équivalence.

Une relation binaire à la fois réflexive, symétrique et transitive est appelée une relation d'équivalence.

### Exemples

> Sur  $E = \{ \text{les élèves de CPGE à C.Vernet} \}$ ,  
on considère la relation 'sont dans la même classe (en math)'

On vient de voir dans les exemples précédents que cette relation était réflexive, transitive, symétrique.

La relation "suivent le même cours de math" est une relation d'équivalence sur  $E$ .

> Sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices carrées de taille  $n$ , on considère la relation 'est semblable à'

$$\text{CàD } A \mathcal{R} A' \iff \left| \begin{array}{l} \text{il existe une matrice } P \text{ inversible} \\ \text{telle que } A = P.A'.P^{-1} \end{array} \right.$$

C'est une relation d'équivalence

### Théorème 3. Relations de congruence modulo un réel sur $\mathbb{R}$

Soit  $x, x', 2\pi$  des réels

On dit que  $x$  et  $x'$  sont dits congrus modulo  $a$ , noté  $x \equiv x' \pmod{[2\pi]}$

Ssi il existe un entier  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $x = x' + ka$

La relation "congrus modulo  $[2\pi]$ " est une relation d'équivalence.

Démonstration : On a

>  $x = x + 0 \cdot 2\pi$  donc  $x \equiv x \pmod{[2\pi]}$ . Donc la relation est réflexive.

> Si  $x = x' + k_1 \cdot 2\pi$  et  $x' = x'' + k_2 \cdot 2\pi$ , on a  $x = \dots = x'' + (k_1 + k_2) \cdot 2\pi$ .

Donc la relation est transitive.

> Si  $x = x' + k \cdot 2\pi$  alors  $x' = x - ka = x + (-k) \cdot 2\pi$ ,

Donc la relation est symétrique.

**Définition 4. Classe d'équivalence.**

Soit  $E$  un ensemble avec  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence sur  $E$ .

Soit  $a \in E$ .

La classe d'équivalence de  $a$ , notée  $\mathcal{C}\ell(a)$ ,  
c'est l'ensemble des éléments de  $E$  qui sont en relation avec  $a$ ,

$$\text{CàD } \mathcal{C}\ell(a) = \{x \in E \text{ tel que } x \mathcal{R} a\}$$

$$x \in \mathcal{C}\ell(a) \iff x \text{ est un relation avec } a \iff x \mathcal{R} a$$

**Exemple**

> Sur  $E = \{\text{les élèves de CPGE à C.Vernet}\}$ , on considère la relation

'sont dans la même classe (en math)'

On a vient de voir que cette relation est une relation d'équivalence sur  $E$ .

On considère l'élève *Hoyiez*

La classe d'équivalence de l'élève *Hoyiez*, est constituée des élèves de CPGE de C.Vernet  
qui suivent le même cours de math que *Hoyiez* C'est donc la classe de MPSI,

Conclusion :  $\mathcal{C}\ell(\text{Hoyiez}) = \text{MPSI}$

**Théorème 5. Propriétés des classes d'équivalence.**

Soit  $E$  un ensemble avec  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence sur  $E$ .

>  $\mathcal{C}\ell(a)$  est un ensemble.

>  $\mathcal{C}\ell(a)$  n'est pas jamais vide car  $a \in \mathcal{C}\ell(a)$

> Si  $x \in \mathcal{C}\ell(a)$  alors  $\mathcal{C}\ell(x) = \mathcal{C}\ell(a)$

> On considère  $a, b \in E^2$ , on a alors

$$\text{Soit } \mathcal{C}\ell(a) = \mathcal{C}\ell(b) \quad \text{Soit } \mathcal{C}\ell(a) \cap \mathcal{C}\ell(b) = \emptyset$$

Démonstration : On a  $a \in \mathcal{C}\ell(a)$  car la relation  $\mathcal{R}$  est réflexive.

### 3 Relation d'ordre.

#### Définition 6. Ordre Totale - Ordre Partielle.

Relation d'ordre Soit  $E$  un ensemble.

On dit qu'une relation  $\mathcal{R}$  sur un ensemble  $E$  est une relation d'ordre

ssi  $\mathcal{R}$  est à la fois réflexive, transitive et antisymétrique.

On dit alors que l'association de  $E$  avec  $\mathcal{R}$  forme un ensemble ordonné.

Ordre total - Ordre partiel Soit  $E$  et  $\mathcal{R}$  une relation d'ordre sur  $E$ .

> Deux éléments  $x$  et  $y$  de  $E$  sont dits comparables (pour  $\mathcal{R}$ ) si  $x\mathcal{R}y$  ou si  $y\mathcal{R}x$ .

> Lorsque deux éléments quelconques de  $E$  sont *toujours* comparables.

On dit que  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre total sur  $E$  et on dit que l'ensemble  $E$  est dit totalement ordonné par  $\mathcal{R}$ .

> **Sinon** (c'est-à-dire s'il existe au moins deux éléments non comparables).

On dit que  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre partiel sur  $E$  et on dit que l'ensemble  $E$  est partiellement ordonné par  $\mathcal{R}$ .

#### Exemples

> Sur  $E = \mathbb{R}$ , on considère la relation  $\leq$  classique.

Donc la relation  $\leq$  est une relation d'ordre totale sur  $\mathbb{R}$ .

> Sur  $E = \mathbb{R}$ , on considère la relation  $<$  classique.

Donc la relation  $<$  n'est pas une relation d'ordre.

car elle est ~~réflexive~~, transitive, ~~symétrique~~, ~~antisymétrique~~.

> Sur  $E = \{ \text{les mots de la langue française} \}$ , l'ordre lexicographique, CàD celui du dictionnaire, est une relation d'ordre totale sur  $E$ .

> La relation d'inclusion est une relation d'ordre partiel sur  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble des parties de  $E$ .

> La relation " $n$  divise  $m$ " est une relation d'ordre partiel sur  $\mathbb{N}$ .

#### **Théorème 7. Relation d'ordre sur $\mathbb{C}$ .**

L'ordre lexicographique est une relation d'ordre (totale) sur  $\mathbb{C}$

MAIS sur  $\mathbb{C}$ , il n'y a pas de relation d'ordre compatible avec les opérations

Conclusion : Écrire  $z \leq z'$  n'a pas de sens.

Correction.