Les ensembles : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

1 Les ensembles de nombre.

1.1 Les ensembles $\mathscr{P}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$.

L'ensemble $\mathscr{P}$ des nombres premiers.

> L'ensemble $\mathscr{P}$ est infini et on a

$$\mathscr{P} = \{2,3,5,7,11,3,17,19,...,41,...,641,...,2017,......\}$$

> Les nombres premiers permettent de factoriser les entiers.

L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.

> *Écriture décimale* .

L'écriture décimale de 2017 signifie : $2017 = 7.10^0 + 1.10^1 + 0.10^2 + 2.10^3$.

Écriture décimale des entiers Soit $n \in \mathbb{N}$.
Il existe $p \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, ...a_p \in \{0,1,2,..,9\}$ tel que

$$n = a_0.10^0 + a_1.10^1 + ... + \underbrace{a_p}_{\neq 0}.10^p = \sum_{k=0}^{p} a_k.10^k$$

Le nombre $p+1$ c'est le nombre de chiffre dans l'écriture décimale.

> *Factorisation en nombre premier.*

On peut factoriser de façon unique les entiers en produit de nombre premier.
Par exemple : $2016 = 2^5 3^2 7,\ 2017 = 2017^1,\ 2018 = 2^1 1009^1$

L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

> un entier relatif est un entier naturel signé, CàD un entier naturel avec un signe.
Ainsi

$$p \in \mathbb{Z} \iff \textit{Il existe } n \in \mathbb{N} \textit{ tel que } p = \pm n$$

1.2 L'ensemble $\mathbb{Q}$.

> Une fraction est un quotient signé de 2 entiers naturels.

Ainsi on a

$$r \in \mathbb{Q} \text{ on peut écrire } r = \pm {}^{a}/_{b} \text{ avec } a, b \in \mathbb{N}$$

`On sait que` : L'écriture des rationnelles n'est pas unique ; chacun sait que ${}^{2}/_{3} = {}^{4}/_{6}$, cependant

Les rationnels s'écrivent de façon unique en *fraction irréductible*, CàD comme quotient signé d'entier premier entre eux, CàD

$$r \in \mathbb{Q} \iff \textit{Il existe un unique couple } (a,b) \in \mathbb{N}^2 \textit{ tel que } \begin{cases} r = \pm {}^{a}/_{b} \\ \textit{et a et b n'ont pas de facteur premier commun.} \end{cases}$$

Théorème 1.
Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel, CàD $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Démonstration : On fait un RA. On suppose donc que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, CàD il existe $a, b \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$

$$\boxed{\text{On cherche OUPS!}}$$

On a

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$
$$\implies b\sqrt{2} = a$$
$$\implies b^2 2 = a^2$$

Comme $a, b \in \mathbb{N}$, on sait que a et b se factorise en produit de facteur premier,

ainsi on a $a = 2^{\alpha} \times (\textit{les autres facteurs premiers }_{\textit{impairs}})\ et\ b = 2^{\beta} \times (\textit{les autres facteurs premiers }_{\textit{impairs}})$

L'égalité $b^2 2 = a^2$, devient

$$2^{2.\beta} \times (\textit{d'autres facteurs premiers impairs}).2 = 2^{2.\alpha} \times (\textit{d'autres facteurs premiers impairs})$$

OUPS : Multiplicité de $2 = \underbrace{2\beta + 1}_{\textit{à Gauche}} = impaire$ ET Multiplicité de $2 = \underbrace{2\alpha}_{\textit{à Droite}} = paire$

1.3 $\mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{R}}$

Définition 2. Les ensembles $\mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{R}}$.

L'ensemble $\mathbb{R}$.

$x \in \mathbb{R} \iff x = 314,1592653.......$

L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$.

On dit que $\overline{\mathbb{R}}$ est la droite achevée, complétée, CàD

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

2 Propriétés de $\mathbb{R}$

2.1 Valeurs Absolues.

Définition 3. Définition de $|x|$.

Soit x un réel.
Il existe plusieurs façons *équivalentes* de définir/calculer le nombre $|x|$.

> Simplification.

On a $|x| = \begin{cases} = +x & \textit{Lorsque } x \geqslant 0 \\ = -x & \textit{Lorsque } x \leqslant 0 \end{cases}$

> Majoration/Encadrement.

$|x|$, c'est le plus grand entre $+x$ et $-x$.
Ainsi on a : $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

> Distance.

$|x| = |x-0|$, c'est la distance de x à 0.

Kulture ?
$|x| \leqslant K \iff .... \iff -K \leqslant x \leqslant K$

*

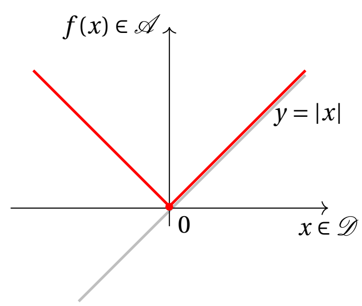
Graphe.

La fonction Valeur Absolue $x \longmapsto |x|$

> est définie et continue sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

> est dérivable sur $\mathscr{D}' = \mathbb{R}^*$.

La fonction Valeur Absolue n'est pas dérivable en 0.



Théorème 4. Formulaire.

Soit x, x', a des réels.

Méthode.
Les valeurs absolues ont vocation à être simplifier

> **Positivité.** $|x|$ est un réel $\geqslant 0$ et $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

> **Calcul.**

$$|-x| = |x| \text{ et } |x.x'| = |x|\,|x'| \text{ et Si } x' \neq 0,\ \left|\frac{x}{x'}\right| = \frac{|x|}{|x'|}$$

Attention au piège. $\sqrt{x^2} = |x| \neq x$

> **Symétrie.** $|a-x| = |x-a|$.

> **L'inégalité triangulaire.**

$$|2x+3x'| \leqslant 2|x| + 3|x'| \quad \textit{et} \quad |2x-3x'| \leqslant 2|x| + |3x'|$$

2.2 Partie entière.

Définition 5. La partie entière de x.

Soit x un réel. Alors il existe un unique entier, noté $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$ tel que

$$\lfloor x \rfloor \underset{\text{Large}}{\leqslant} x \underset{\text{Strict}}{<} \lfloor x \rfloor + 1$$

Propriétés.

> Lorsque $n = \lfloor x \rfloor$
alors $n \leqslant x < n+1$ et $x-1 < n \leqslant x$

> Large : Le plus grand entier p tel que $p \leqslant x$, c'est $p = \lfloor x \rfloor$

> Strict : Le plus petit entier p tel que $x < p$, c'est $p = \lfloor x \rfloor + 1$

> On a aussi

$$\left.\begin{array}{r} n \text{ est un entier} \\ \\ n \leqslant \square < n+1 \end{array}\right\} \iff n = \lfloor \square \rfloor$$

Exercice 1. [Correction]

1. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{Z}$, Alors $\lfloor x+p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p$.
2. Soit $n \in \mathbb{Z}$, montrer que $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor = \begin{cases} n/2 & \text{Si } n \text{ est pair.} \\ \\ (n-1)/2 & \text{Si } n \text{ est impair.} \end{cases}$
3. Montrer que $\left\lfloor \left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)^2 \right\rfloor = 4n+1$

Exercice 2. [Correction] Soit $n = 2^{2^5} + 1$. On note p le nombre de chiffre de n dans l'écriture décimale

1. Montrer que : $10^{p-1} \leqslant n < 10^p$.
2. En déduire que : $p = \left\lfloor \dfrac{\ln(n)}{\ln(10)} \right\rfloor + 1$

Exercice 3. [Correction] **Très Difficile mais sympa.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie de la manière suivante :

$$u_1 = 1,\ u_2 = u_3 = 2,\ u_4 = u_5 = u_6 = 3,\ u_7 = u_8 = u_9 = u_{10} = 4, \dots$$

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les indices de n tel que que $u_n = k$
2. En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left\lfloor \dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor$

2.3 Majorant, minorant, max, min, sup, inf.

Définition 6. Majoré, minoré, Borné

On considère $A \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$.

> On dit que la partie A est majorée Ssi il existe M tel que $\forall\ x \in A,\ x \leqslant M$.
On dit alors que M est un majorant de la partie A.

> On dit que la partie A est minorée Ssi il existe m tel que $\forall\ x \in A,\ x \geqslant m$.
On dit alors que m est un minorant de la partie A.

> On dit que la partie A est bornée Ssi il existe K tel que

$$\forall\ x \in A,\ |x| \leqslant K.$$

Bornée $\iff$ Majorée/minorée.

La partie A est bornée par K
ALORS la partie A est majorée $+K$ et minorée $-K$.

La partie A est majorée M et minorée par m
ALORS la partie A est bornée par $\max\big(|M|, |m|\big)$.

Démonstration : On va faire $\Longrightarrow$ et $\Longleftarrow$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ C'est le sens évident car $|x| \leqslant K \iff -K \leqslant x \leqslant K$.
Donc Si la partie A est bornée par K, alors elle est majorée par K et minorée par $-K$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ C'est un peu plus technique.
On suppose que la partie est majorée par M et minorée par m. On a

$$m \leqslant x \leqslant M \Longrightarrow [x \leqslant M \ et\ -x \leqslant -m]$$

Donc x et $-x$ sont $\leqslant \max(M, -m) \Rightarrow |x| \leqslant \max(M, -m)$
Conclusion : la partie A est bornée par $\max(M, -m)$.

Définition 7. Max-Sup et min-inf

On considère A une partie.

Max et min. On dit que M_0 est le plus grand élément de A, noté $M_0 = \max(A)$,

Ssi $M_0 \in A$ et M_0 majore la partie A

On définit de même min, le plus petit élément d'un ensemble.

sup - inf. On dit que M est le sup de A, noté $M = \sup(A)$,

Ssi M est la majorant "optimal" de A.

Ainsi $M = \sup(A)$ a deux propriétés "évidentes"

> M est un majorant de A

> M est optimal

Optimal : Traduction A	Optimal : Traduction B
Le sup est le meilleur majorant, CàD Si M' est un autre majorant alors forcément $M \leqslant M'$	Le sup est le meilleur majorant, CàD comme $M - \varepsilon \underset{Strict}{<} M$ alors $M - \varepsilon$ ne majore pas.

Quand la partie non vide A n'est pas majoré, alors $\sup(A) = +\infty$.

Les situations possibles.

> On peut avoir : $M_0 = \max$ n'existe pas et $M = \sup$ n'existe pas.

> On peut avoir : $M_0 = \max$ n'existe pas et $M = \sup$ existe.

> Si $M_0 = \max$ existe alors forcément $M = \sup$ existe et $M = M_0$.

Théorème 8. Existence des Max et Sup.

Dans $\mathbb{Z}$, les max existent.

Si A une partie non vide de $\mathbb{Z}$.

$$\text{Alors } \max(A) \text{ existe toujours dans } \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$$

$$\max(A) \in \mathbb{Z} \iff \max(A) \neq \infty \iff \text{la partie } A \text{ est majorée}$$

Dans $\mathbb{R}$, les sup existent.

On considère $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.

$$\sup(A) \text{ existe toujours dans } \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$\sup(A) \in \mathbb{R} \iff \sup(A) \neq \infty \iff \text{la partie } A \text{ est majorée}$$

En fait, il y a 3 situations possibles.

> $\sup(A) = +\infty$ et donc la partie A est non-majorée.

> $\sup(A) = M$ et $M \notin A$. Ici $M = \sup(A)$ et $\max(A)$ n'existe pas.
Par exemple : $A = [0, 1[$.

> $\sup(A) = M$ et $M \in A$. ici $M = \sup(A) = \max(A)$.
Par exemple : $A = [0, 1]$.

2.4 $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Commençons par un exemple.

On considère le célèbre nombre $\pi = 3,1415192654.....$

On peut tronquer l'écriture décimale, ainsi on a

$$\underbrace{3.141}_{\textit{troncature à } 10^{-3}} \leqslant \pi < 3.141 + 10^{-3} = 3.142$$

en plus $0 \leqslant \pi - \underbrace{3.141}_{\textit{troncature à } 10^{-3}} < 10^{-3}$.

On dit que

> $3,141$ est la valeur *décimale* approchée à la précision 10^{-3} de π par défaut.

> $3,142$ est la valeur *décimale* approchée à la précision 10^{-3} de π par excès.

Il est "facile" d'exprimer $\underbrace{3.141}_{\textit{troncature à } 10^{-3}}$ à l'aide de π, en effet

$$\begin{aligned} \pi = 3,1415192653..... &\Longrightarrow 10^3.\pi = 3141,5192653..... \\ &\Longrightarrow \lfloor 10^3.\pi \rfloor = 3141 \\ &\quad \textit{Donc}\, 3.141 = \frac{\lfloor 10^3.\pi \rfloor}{10^3} \end{aligned}$$

Si on remplace π par x un réel quelconque, on a le théorème

Théorème 9. Approximation des réels par des rationnels.

Soit x un réel et n un entier

La valeur décimale approchée à la précision 10^{-n} de x par défaut

$$\text{est égale à } \frac{\lfloor x.10^n \rfloor}{10^n} \in \mathbb{Q}$$

De plus, on a $0 \leqslant x - \dfrac{\lfloor x.10^n \rfloor}{10^n} \leqslant 10^{-n}$.

Conclusion : La suite des approximations décimales converge vers x.

Approximation des réels par des rationnels.

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$,

CàD $\forall\, x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ r_n \in \mathbb{Q} \quad et \quad r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$$

2.5 Les intervalles de $\mathbb{R}$.

Définition 10. Les intervalles.

On dit que que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ Ssi $I \subset \mathbb{R}$ et

$$\forall\, a, b \quad \big[\ (a,b) \in I^2 \implies [a,b] \subset I\ \big]$$

`De façon imagée, un intervalle n'a pas de trou,`

sinon on pourrait choisir a et b de part et d'autre du trou.

Exemple : L'ensemble $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ n'est pas un intervalle.

En effet, -2 et 1 sont dans $\mathbb{R}^*$ mais $[-2, 1] \not\subset \mathbb{R}^*$.

$\mathbb{R}^*$ est la réunion <u>disjointe</u> de $]-\infty, 0[$ et de $]0, +\infty[$.

Il est clair que $\mathbb{R}^*$ a un "petit" trou.

Théorème 11. Liste exhaustive des intervalles de $\mathbb{R}$.

Il y a 3 type d'intervalle non vide.

> Les intervalles ouverts (bornés ou non)

$$]-\infty, +\infty[\,, \quad]-\infty, b[\,, \quad]a, +\infty[\,, \quad]a, b[$$

> Les intervalles semis-ouverts (bornés ou non)

$$]-\infty, a]\,, \quad]a, b]\,, \quad [a, +\infty[\,, \quad [a, b[$$

> Les intervalles fermés et bornés sont appelés les **segments**

$$[a, b]$$

Démonstration : Soit I un intervalle non vide.

Je note $a = \inf(I)$ et $b = \sup(I)$.

Comme I est une partie non vide de $\mathbb{R}$, on sait que a, b existent et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

A cause des propriétés des sup et des inf, on sait que soit $a \in A$, soit $a \notin A$. (et de même pour b)

Je suppose que $a \in A$ (et donc forcément $a \neq -\infty$) et $b \notin A$ (avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$)

$\boxed{\text{On va montrer avec } \subset \text{ et } \supset \text{ que : } A = [a, b[}$

$\boxed{\subset ?}$ Soit $x \in A$

Comme $a = \inf(A)$ et $x \in A$, on a $a \leqslant x$.
Comme $b = \sup(A)$ et $x \in A$, on a $x \leqslant b$. De plus $b \notin A$ donc $x \neq b$ donc $x < b$.

Conclusion : $a \leqslant x < b$, CàD $x \in [a, b[$

$\boxed{\supset ?}$ Soit $x \in [a, b[$

Comme $x < b$ et $b = \sup(A) =$ *le majorant optimal* donc x ne majore pas A.
Donc il existe $a' \in A$ tel que $x < a'$
Comme $a = \inf(A)$ et $x \in A$, on a $a \leqslant x$.
Ainsi $a \leqslant x \leqslant a'$, CàD $x \in [a, a']$.
Or $a, a' \in A$ et A est un intervalle donc $[a, a'] \subset A$

Conclusion : $x \in [a, a'] \subset A$

Correction.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. Si n est pair alors $n=2p$ et $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2p}{2} \right\rfloor = \lfloor p \rfloor = p$

   Si n est impair alors $n=2p+1$ et $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2p+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor p\frac{1}{2} \right\rfloor = p$

2. On encadre, CàD on démontre $4n+1 \leqslant \left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2 \leqslant 4n+2$.

   On chemine $4n+2-\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2 = ... \geqslant 0$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé) Si l'écriture décimale de $n = 2^{2^5}+1$ a avec exactement p chiffre, on a

$$\underbrace{100\cdots 0}_{p\ chiffres} \leqslant n \leqslant \underbrace{999\cdots 9}_{p\ chiffres} < \underbrace{100\cdots 0}_{p+1\ chiffres}$$

de plus on a $10^{p-1} \leqslant n < 10^p \iff \cdots \iff p \leqslant \frac{\ln(n)}{\ln(10)}+1 < p+1$

$$\text{Conclusion : } p = \left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(10)} \right\rfloor + 1$$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé) On compte et on trouve que $u_n = k \iff \frac{(k-1)k}{2} \leqslant n < \frac{k(k+1)}{2}$

La fonction $f : x \longmapsto \frac{(x-1)x}{2}$ réalise une bijection strictement croissante de $[1+\infty[$ sur $\mathbb{R}^+$

et on trouve que $f^{-1} : x \longmapsto \frac{1+\sqrt{8x-7}}{2}$

$$\begin{aligned}
\text{Conclusion : } u_n = k &\iff \frac{(k-1)k}{2} \leqslant n < \frac{k(k+1)}{2} \\
&\iff f(k) \leqslant n < f(k+1) \\
&\iff k \leqslant f^{-1}(n) < k+1 \\
&\iff k = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor
\end{aligned}$$