TD 12 Un peu de tout.

Jeudi 28 Novembre 2024.

Partie entière.

Exercice 1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

À l'aide de l'encadrement de $\lfloor \square \rfloor$, justifier l'existence et déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$ et de $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n} \left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor$

petit $\longleftarrow$ Axe de Petit/Gros $\longrightarrow$ Gros

Exercice 2. [Correction] Placer sur un axe du plus Gros au plus petit

$> \frac{1}{\sqrt{n}},\ \frac{1}{2^n},\ \frac{\ln n}{n\sqrt{n}},\ 1,\ \frac{\sqrt{n}}{n^2}$

$> n,\ n\,(\ln n)^2,\ \frac{n}{\sqrt{n}},\ n^2\sqrt{\ln n},\ n^2 \ln n,\ o\left(\sqrt{n}\right)$

$> \ln(n),\ \ln(n^2),\ \ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\ (\ln n)^2$

Rappel :

Lorsque $A/B \longrightarrow 0$
alors B devient infiniment plus gros que A

Lorsque $A/B \longrightarrow \infty$
alors A devient infiniment plus gros que B

Lorsque $A/B \longrightarrow \ell$
alors A et B sont sur le même trait
Mais n'ont pas forcément le même OdG

Exercice 3. [Correction] Placer sur un axe du plus Gros au plus petit

Quand $x \longrightarrow 0$.

$> x$, 1 et $\sqrt{x}$ et x^2 et $x\sqrt{x}$

$> \frac{1}{x^2}$ et 3 et $\frac{1}{x\sqrt{x}}$ et $\frac{2}{x}$

$> \frac{3}{x^2}$ et $\frac{1}{2\,x^2}$ et $\frac{1}{x^2}$ et $\frac{1}{x}$ et x et e^x

$> \ln(x)$ et $\ln(x^2)$ et $\ln^2(x)$.

Les mêmes quand $x \longrightarrow +\infty$ et quand $x \longrightarrow -\infty$

Rappel :

Lorsque $A/B \longrightarrow 0$
alors B devient infiniment plus gros que A

Lorsque $A/B \longrightarrow \infty$
alors A devient infiniment plus gros que B

Lorsque $A/B \longrightarrow \ell$
alors A et B sont sur le même trait
Mais n'ont pas forcément le même OdG

Limite.

Exercice 4. [Correction] Pour chaque expression déterminer l'Odg et/ou la limite.

1. Quand $x \to 0^+$ et $+\infty$, $\dfrac{x+x^2}{x^2\ln(x)+x\ln^2(x)}$
2. Quand $x \to 0^+$ et $+\infty$, $\dfrac{x^3-5\,x^2+3}{x\ln(x)-x^2/\ln(x)}$
3. Quand $x \to +\infty$, $\dfrac{e^{2x+1}}{(e^x+1)^2}$
4. Quand $x \to 0^+$, $x^{\sqrt{x}}$
5. Quand $n \to \infty$, $\dfrac{\sin(n^2)}{n}$
6. Quand $n \to \infty$, $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$

Exercice 5. [Correction] Pour chaque expression déterminer l'Odg et/ou la limite.

1. Quand $x \to 0$, $\dfrac{e^x-1}{\sin(x)}$
2. Quand $x \to 0$, $\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin(3x)}$
3. Quand $x \to 0$, $\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{e^{2x}-1}$
4. Quand $x \to 0$, $\dfrac{2^x-1}{\ln(1-2x)}$
5. Quand $n \to \infty$, $\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}$
6. Quand $n \to \infty$, $\sqrt{e^n+2^n}-\sqrt{e^n+1}$
7. Quand $n \to \infty$, $n\left(a^{1/n}-b^{1/n}\right)$ avec $a,b>0$

Exercice 6. [Correction]

1. Calculer la limite de $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ quand $n \to \infty$
2. Calculer la limite de $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ quand $x \to 0^+$
3. Soit $a,b \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer la limite de $\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$ quand $x \to 0^+$

Bijection sans trop de calcul.

Exercice 7. [Correction] Soient f,g deux fonction de E à valeurs dans E.

On suppose que :

> $f \circ g \circ f = g$ et $g \circ f \circ g = f$

> f est injective.

1. Justifier que : g est injective
2. Montrer que : $f \circ g \circ f \circ g \circ f \circ g = f$.
   En déduire que $\forall\, e \in E,\ [g \circ f \circ g \circ f \circ g](e) = e$.
3. En déduire que g et f sont bijectives.

Un exemple dans $\mathbb{R}^2$

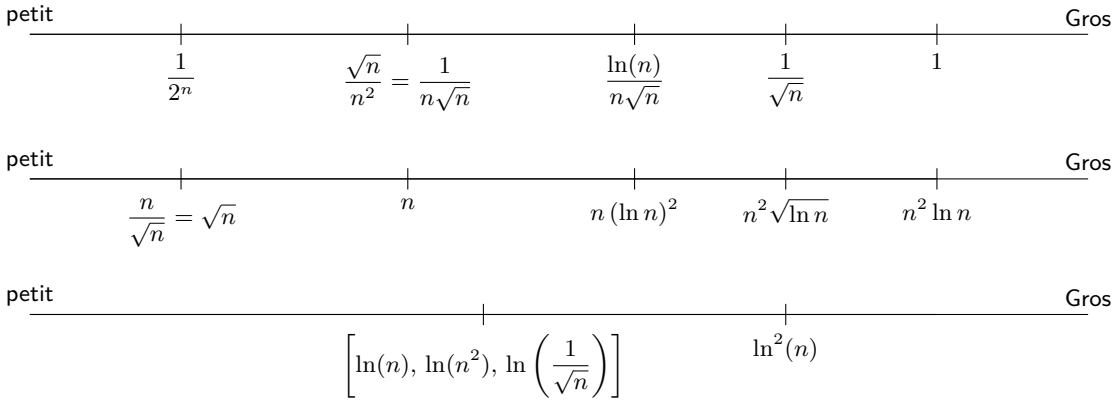
Exercice 8. [Correction] Soit la fonction h de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$h(x,y) = (x\,e^y, x\,e^{-y}).$$

1. Justifie que $(0,0)$ admet plusieurs antécédents. Que peut-on conclure ?
2. Justifier que $(-6,6)$ n'a pas d'antécédent par h. Que peut-on conclure ?
3. Bonus Trouver des conditions sur a et b pour que (a,b) ait un/des antécédents. Que peut-on conclure ?

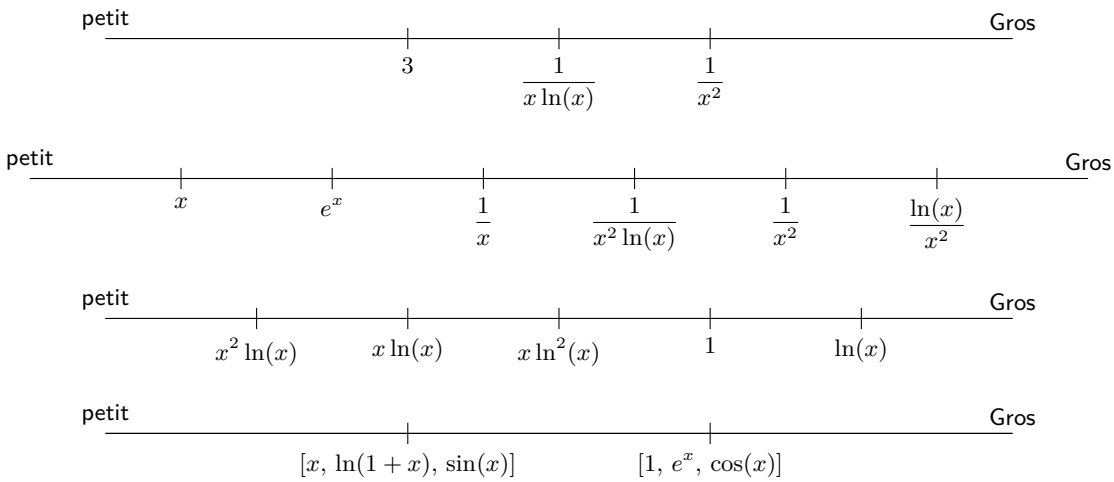
Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

Quand $n \to \infty$, on a

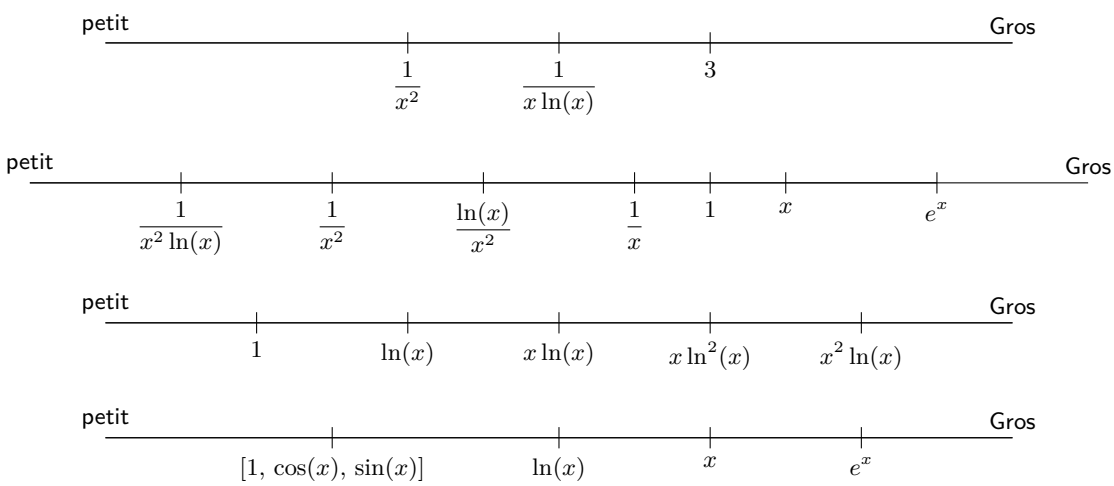


Solution de l'exercise 3 (Énoncé)

Quand $x \to 0$, on a



Quand $x \to \infty$, on a



Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

$$\frac{x+x^2}{x^2\ln(x)+x\ln^2(x)} \underset{x\to\infty}{=} \frac{x+o(x)}{x\ln^2(x)+o(x\ln(x)}$$
$$= \frac{x[1+o(1)]}{x\ln^2(x)[1+o(1)]} = \frac{1}{\ln^2(x)}[1+o(1)] \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{\ln^2(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

$$\frac{x^3-5\,x^2+3}{x\ln(x)-{x^2}/{\ln(x)}} \underset{x\to 0}{=} \frac{x^3+o(x^3)}{-{x^2}/{\ln(x)}\ +o({x^2}/{\ln(x)}\ )}$$
$$= \frac{x^3[1+o(1)]}{-{x^2}/{\ln(x)}\ [1+o(1)]} = -x\ln(x)[1+o(1)] \underset{x\to\infty}{\sim} -x\ln(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} -\infty$$

$$x^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}\ln(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} e^0 \text{ FI classique } = 1$$
$$= 1+\square+o(\square) = 1+\sqrt{x}\ln(x)+o(\sqrt{x}\ln(x)) \xrightarrow[x\to 0]{} 1+0+0$$
$$\frac{e^{2x+1}}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x}e}{e^{2x}+2e^x+1}$$
$$\underset{x\to\infty}{=} \frac{e^{2x}e}{e^{2x}+o(e^{2x})} = \frac{e^{2x}e}{e^{2x}[1+o(1)]} = e[1+o(1)] \underset{x\to\infty}{\sim} e \xrightarrow[x\to\infty]{} e$$

Solution de l'exercice 5 **(Énoncé)**

$$\frac{e^x-1}{\sin(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{(1+x+o(x))-1}{x+o(x)} = \frac{x+o(x)}{x+o(x)} = \frac{x[1+o(1)]}{x[1+o(1)]} = 1[1+o(1)] \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

$$\frac{\ln(1+2x)}{\sin(3x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{[1+2x+o(2x)]-1}{3x+o(3x)} = \frac{2x[1+o(1)]}{3x[1+o(1)]} = \frac{2}{3}[1+o(1)] \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{2}{3}$$

$$\frac{\sqrt{1+2x}-1}{e^{2x}-1} \underset{x\to 0}{=} \frac{\left(1+\frac{1}{2}(2x)+o(2x)\right)-1}{\left(1+(2x)+o(2x)\right)-1} = \frac{x[1+o(1)]}{2x[1+o(1)]} = \frac{1}{2}[1+o(1)] \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\frac{2^x-1}{\ln(1-2x)} &= \frac{e^{x\ln(2)}-1}{\ln(1-2x)}\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{(1+x\ln(2)+o(x)-1}{-2x+o(2x)}\\ &= \frac{x\ln(2)[1+o(1)]}{-2x[1+o(1)]} = \frac{-\ln(2)}{2}[1+o(1)] \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{-\ln(2)}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+n} &= \sqrt{n^2(1+\frac{1}{n})}\\ &= \sqrt{n^2}\sqrt{1+\frac{1}{n}}\\ &= |n|\sqrt{1+\frac{1}{n}}\\ &= n\left[1+\frac{1}{2}\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right] = n+\frac{1}{2}+o(1)\\ \sqrt{n^2-n} &= \cdots = n-\frac{1}{2}+o(1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n} &= \left[n+\frac{1}{2}+o(1)\right]-\left[n-\frac{1}{2}+o(1)\right]\\ &= 1+o(1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 6 **(Énoncé)**

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= e^{n\ln(1+\frac{1}{n})} \\
&= e^{n\ \ln(1+\square)} \\
&= e^{n\,(\square+o(\square))} = e^{n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+o(1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^1 = e
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= \exp\left(x\ln\left[1+\frac{1}{x}\right]\right) \\
&= \exp\left(x\ln\left[\frac{1+x}{x}\right]\right) \\
&= \exp\left(x\left[\ln(1+x)-\ln(x)\right]\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \exp\left(x\left[x+o(x)-\ln(x)\right]\right) \\
&= \exp\left(-\underbrace{x\ln(x)}_{Gros}+\underbrace{x^2}_{Petit}+o(x^2)\right) \\
&\textit{Quand } x\to 0\textit{, on a } Gros = x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \textit{ et de même pour les autres} \\
&\xrightarrow[x\to 0]{} e^0 = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x} &= \exp\left(\frac{1}{x}\ \ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{x}\ \ln\left(\frac{e^{x\ln a}+e^{x\ln b}}{2}\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{x}\ \ln\left(\frac{e^{\square}+e^{\square'}}{2}\right)\right) \\
&= \underset{x\to 0}{=} \exp\left(\frac{1}{x}\ \ln\left(\frac{(\square+o(\square))+(\square'+o(\square'))}{2}\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{x}\ \ln\left(\frac{2+(\ln a+\ln b)x+o(x)}{2}\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{x}\ \ln\left(1+\frac{\ln a+\ln b}{2}x+o(x)\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{x}\ \ln\left(1+\square\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{x}\ \left(\square+o(\square)\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{x}\ \left(\frac{\ln a+\ln b}{2}x+o(x)\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{\ln a+\ln b}{2}+o(1)\right) \xrightarrow[x\to\infty]{} \exp\left(\frac{\ln a+\ln b}{2}\right) = \exp\left(\ln\left(\sqrt{ab}\right)\right) = \sqrt{ab}
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 7 **(Énoncé)**

1. Comme $g\circ f\circ g = f$ et f est injective donc g est injective.
2. On a $f = g\circ f\circ g = [f\circ g\circ f]\circ f\circ g = f\circ g\circ f\circ f\circ g$.
   Cette égalité signifie que :

   $$\forall\, e\in E,\ f(e) = [f\circ g\circ f\circ f\circ g](e) = f([g\circ f\circ f\circ g](e))$$
   c'est une égalité de la forme $f(\square) = f(\square')$

   On applique la définition de f injective avec $\square = e$ et $\square' = [g\circ f\circ f\circ g](e)$

   Ainsi $\forall\, e\in E,\ e = [g\circ f\circ f\circ g](e)$
3. Comme $\forall\, e\in E,\ e = [g\circ f\circ f\circ g](e)$,

   on a donc $g\circ f\circ f\circ g = id_E$

   Ainsi $g\circ f\circ f\circ g = id_E$ et id_E est bijective donc g est surjective ! ! !

   Ainsi g est surjective et injective, g est donc bijective.

On termine facilement avec $f \circ g \circ f = g$ et g bijective donc f est surjective.

Solution de l'exercice 8 (Énoncé)

1. Les antécédents de $(0,0)$ sont les solutions de l'équation $h(X,Y) = (0,0)$.
   On résout

$$h(X,Y) = (0,0) \iff h(x,y) = (0,0) \iff (x\,e^{y}, x\,e^{-y}) = (0,0)$$
$$\iff \begin{cases} x\,e^{y} = 0 \\ x\,e^{-y} = 0 \end{cases}$$

   Or $x\,e^{y} = 0 \iff x = 0 \; ou \; e^{y} = 0 \iff x = 0$ et $x\,e^{-y} = 0 \iff x = 0 \; ou \; e^{-y} = 0 \iff x = 0$

   Conclusion : les antécédents de $(0,0)$ sont les $(0,y)$ avec qcq $y \in \mathbb{R}$.

   Comme l'équation $h(X) = (0,0)$ admet une infinité de solutions la fonction h n'est pas injective.
2. Les antécédents de $(6,-6)$ sont les solutions de l'équation $h(X) = (6,-6)$.
   On résout

$$h(X) = (6,-6) \iff h(x,y) = (6,-6) \iff (x\,e^{y}, x\,e^{-y}) = (6,-6)$$
$$\iff \begin{cases} x\,e^{y} = 6 \\ x\,e^{-y} = 6 \end{cases}$$

   On multiplie les deux équations, ainsi $x^2 = -36 < 0$. Or $x \in \mathbb{R}$ donc c'est absurde ! ! !
   L'équation $h(X) = (6,-6)$ n'a donc pas de solution

   Conclusion : $(6,-6)$ n'a pas d'antécédent.

   Comme l'équation $h(X) = (6,-6)$ n'a pas de solution, la fonction h n'est pas surjective.