

Ordre de grandeur.		3 Équivalent et $[1 + o(1)]$	4
1 Notion de limites, FI.	1	4 Approximation linéaire.	6
2 Les outils pour les limites	2	5 $\mathcal{O}(1)$, Grand "O" de 1	7
2.1 Les ordres de grandeur classiques.	2	6 Exercices	8
2.2 Négligeable / Petit-Gros / $o(1)$	2		

1 Notion de limites, FI.

Définition 1. Notion de limite

Soit f une fonction et $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

On dit que la fonction f tend vers ℓ en a

On dit que le nombre $f(x)$ tend vers ℓ quand $x \rightarrow a$

Ssi le nombre $f(x)$ se rapproche de ℓ (et reste près de ℓ) quand x se rapproche de a .

On note alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$

Attention : "Se rapproche" ne veut pas dire "devient égale".

Théorème

Lorsque $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ Alors $f(\square) \xrightarrow{\square \rightarrow a} \ell$

Définition 2. FI ou pas FI !!!!

> Pas FI.

$$a + \infty = \infty, \quad +\infty + \infty = +\infty, \quad a \cdot (+\infty) = \text{sgn}(a) \cdot \infty \quad \text{pour } a \neq 0$$

$$\infty \cdot \infty = \infty, \quad \frac{a}{\infty} = 0.$$

> FI.

Les FI avec addition, produit, quotient : $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$

Les FI avec les puissances :

$$\infty^0 = e^{0 \ln(\infty)} = e^{0 \cdot \infty}, \quad 1^\infty = e^{\infty \ln(1)} = e^{\infty \cdot 0}, \quad 0^0 = e^{0 \ln(0)} = e^{0 \cdot (-\infty)}$$

2 Les outils pour les limites

2.1 Les ordres de grandeur classiques.

Théorème 3. Aux Bornes de $\mathcal{D}$, on a

> Comparaison des exp-ln-monôme.

- La règle pour les fonctions est :

e^x va plus vite que x^α qui va plus vite que $\ln(x)$

- La règle pour les suites est :

a^n va plus vite que n^α qui va plus vite que $\ln n$.

> Comparaison des monômes entre eux.

La règle est : Lorsque $0 < a < b$ alors x^b va plus vite que x^a .

Applications : les FI classiques.

$$\frac{e^x}{x^3} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \dots\dots$$

$$\frac{e^x}{x^3} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \dots\dots$$

$$e^x x^2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \dots\dots$$

$$e^x x^2 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \dots\dots$$

$$\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \dots\dots$$

$$\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \dots\dots$$

$$\ln(x) \sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \dots\dots$$

$$\ln(x) \sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \dots\dots$$

2.2 Négligeable / Petit-Gros / $o(1)$.

Définition 4. Négligeable, Gros/petit, $o(1)$

> On dit que le nombre $f(x)$ est négligeable devant le nombre $g(x)$ quand x tend vers a

$$\text{Ssi } \text{Quotient} = \frac{\text{Petit}}{\text{Gros}} = \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

On note $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ ou $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\leq} g(x)$ ou $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(v_n)$.

$o(1)$ = c'est un *Truc* qui tend vers 0 quand $x \rightarrow \dots$, quand $n \rightarrow \infty$

Truc signifie une fonction ou une suite.

Interprétation : Lorsque $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(v_n)$, CàD $\text{Quotient} = \frac{\text{Petit}}{\text{Gros}} = \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$,

Donc le nombre v_n devient infiniment plus gros que le nombre u_n .

> $\text{Quotient} = \frac{A}{B} = \frac{1}{2}$ signifie que B est 2 fois plus gros que A .

> $\text{Quotient} = \frac{A}{B} = \frac{1}{10}$ signifie que B est 10 fois plus gros que A .

> $\text{Quotient} = \frac{A}{B} = 0 = \frac{1}{\infty}$, Cela signifie que B est infiniment plus gros que A .

Théorème 5. Formulaire sur les petits "o".*Addition/Combinaison Linéaire.*

$$2 o(x) = o(x)$$

$$o(4 x^2) = o(x^2).$$

À méditer : $o(x) - o(x) = o(x)$ et $2 o(x) - 7 o(x) = o(x)$.

Produit.

$$x^2 \cdot o(x^2) = o(x^4)$$

$$o(x) \cdot o(x^2) = o(x^3)$$

Comparaison

$$\lambda o(x^2) + \mu o(x^3) = o\left(\text{Le plus GROS entre } x^2, x^3\right)$$

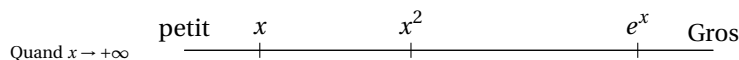
FI et petit "o"

$$\frac{o(1)}{o(1)} \text{ et } \frac{o(\text{Gros})}{o(\text{petit})} \text{ sont des FI}$$

$$\text{Par contre } \frac{o(\text{Gros})}{\text{gros}} \rightarrow 0 \text{ et } \frac{o(\text{petit})}{\text{gros}} \rightarrow 0$$

L'axe des dominations

On peut placer les expressions sur un axe



- > Des expressions placées sur 2 traits différents sont d'OdG différent, il y a un qui devient infiniment plus gros que l'autre.
- > Des expressions, sur le même trait, ne sont pas forcément du même OdG.

Lorsque $A/B \rightarrow 0$

alors B devient infiniment plus gros que A

Lorsque $A/B \rightarrow \infty$

alors A devient infiniment plus gros que B

Lorsque $A/B \rightarrow \ell \neq 0$

alors A et B sont sur le même trait, mais n'ont pas forcément le même OdG

3 Équivalent et $[1 + o(1)]$

Définition 6. Équivalent

On dit que les nombres $f(x)$, $g(x)$ sont équivalentes, CàD ont le même ordre de grandeur, quand x tend vers a

$$\text{Ssi } \textit{Quotient} = \frac{\textit{Petit}}{\textit{Gros}} = \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$$

$$\text{On note } f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \text{ ou } f \underset{a}{\sim} g \text{ ou } u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$$

Interprétation : Avec les équivalents, on mesure la "vitesse" avec laquelle on va vers 0 ou $\pm\infty$.

Par exemple : quand $x \rightarrow +\infty$

$f(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} x^2$ signifie que $f(x)$ va vers $+\infty$ quand x se rapproche de ∞ "à la manière", "à la vitesse" de x^2

$g(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{x^2}{\ln(x)}$ signifie que $f(x)$ va vers $+\infty$ quand x se rapproche de ∞ "à la manière", "à la vitesse" de x^2

MAIS légèrement ralenti par $\ln(x)$,

$g(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} x^2 \ln(x)$ signifie que $f(x)$ va vers $+\infty$ quand x se rapproche de ∞ "à la manière", "à la vitesse" de x^2

MAIS légèrement accélérée par $\ln(x)$,

Conclusion quand $x \rightarrow +\infty$, on a

$$\begin{array}{ccccccc} \text{petit} & & g(x) & & f(x) & & h(x) & & \text{Gros} \\ \hline & & x^2 / \ln(x) & & x^2 & & x^2 \ln(x) & & \end{array}$$

Théorème 7. Autour de $[1 + o(1)]$

> **Attention** $\sim$ ne signifie pas =

> **Attention** On n'est jamais équivalent à 0 ou à ∞ .

> On sait que : $o(1)$, c'est un truc qui tend vers 0

$[1 + o(1)]$, c'est un truc qui tend vers 1
Truc signifie une fonction ou une suite.

et on a $u_n \sim v_n \iff u_n = v_n [1 + o(1)]$

Conclusion : on manipule $[1 + o(1)]$ plutôt que $\sim$

> on a le formulaire

Facteur = $Gros + 2petit - 3petit = \dots = G_F [1 + o(1)]$

$$\text{Facteur} \frac{Haut}{Bas} = G_F [1 + o(1)] \frac{G_H [1 + o(1)]}{G_B [1 + o(1)]} = G_F \frac{G_H}{G_B} [1 + o(1)]$$

Conclusion : Pour calculer un équivalent, on fait FFB

De plus

$$\alpha [1 + o(1)] + \beta [1 + o(1)] = \dots$$

$$[1 + o(1)]^2 = \dots$$

$$\ln [1 + o(1)] = \dots$$

$$e^{[1 + o(1)]} = \dots$$

> Lien Limite/équivalent/petit o .

$$\text{Lorsque } \ell \neq 0, \infty : u_n \longrightarrow \ell \iff u_n = \ell + o(1) \iff u_n = \ell [1 + o(1)] \iff u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ell$$

$$\text{Lorsque } \ell = 0 : u_n \longrightarrow 0 \iff u_n = 0 + o(1) = o(1)$$

4 Approximation linéaire.

Théorème 8.

Pour "gérer" les FI avec $\sin(0)$, $\cos(1)$, $\tan(0)$, e^0 , $\ln(1)$, $\sqrt{1}$,
on utilise l'approximation linéaire.

Approximations linéaires des fonctions classiques : quand $x \rightarrow 0$

$$\begin{array}{ll} e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x) & \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x) \\ \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x) & \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + o(x) \\ \sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x) & \tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x) \end{array}$$

En physique, on oublie le petit "o"

On écrit $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x$
C'est l'approximation linéaire.

En math, il faut impérativement le petit "o"

On écrit $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$

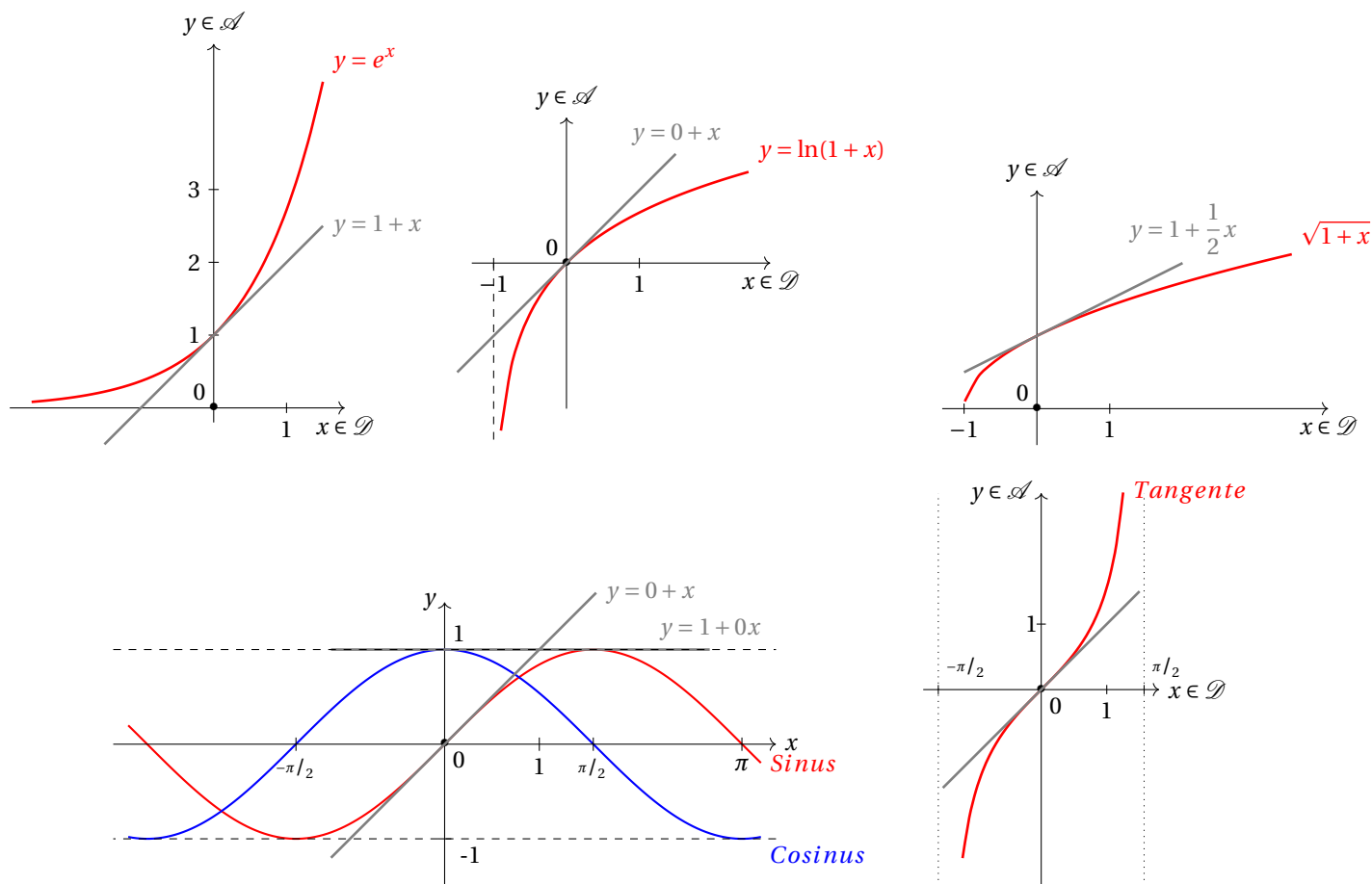
C'est une égalité et il faut savoir manipuler les petits "o".

Généralisation et Interprétation géométrique.

Pour les fonctions dérivables, on a la formule générale valide quand $x \rightarrow 0$

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \underbrace{f(0) + f'(0)x}_{\text{Eq de la tangente en 0}} + o(x)$$

Interprétation Géométrique.



5 $\mathcal{O}(1)$, Grand "O" de 1

Définition 9. $\mathcal{O}(1)$, Grand "O" de 1

> $\mathcal{O}(1)$ = c'est un *Truc* bornée quand $x \rightarrow \dots$, quand $n \rightarrow \infty$

Truc signifie une fonction ou une suite.

Exemple : La fonction Sinus n'a pas de limite quand $x \rightarrow \infty$ mais reste bornée

$$\text{On a donc } \sin(n) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \mathcal{O}(1) \text{ et } \cos(n) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \mathcal{O}(1)$$

> Généralisation. On dit que le nombre $f(x)$ est un grand "O" du nombre $g(x)$ quand x tend vers a

Le quotient reste bornée quand x tend vers a

$$\text{On note } f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \mathcal{O}(g(x)) \text{ ou } u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} \mathcal{O}(v_n).$$

théorème

$$\frac{\mathcal{O}(1)}{\infty} = 0 \text{ et } \mathcal{O}(1) - \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(1) \text{ et } 2\mathcal{O}(1) - 7\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(1)$$

6 Exercices

————— Quand $n \rightarrow \infty$ —————

Exercice 1. [Correction] Placer sur un axe du plus Gros au plus petit

petit
←
→
 Gros

$$> \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{2^n}, \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}, 1, \frac{\sqrt{n}}{n^2}$$

$$> n, n(\ln n)^2, \frac{n}{\sqrt{n}}, n^2\sqrt{\ln n}, n^2\ln n, o(\sqrt{n})$$

$$> \ln(n), \ln(n^2), \ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), (\ln n)^2$$

Rappel :

Lorsque $A/B \rightarrow 0$
alors B devient infiniment plus gros que A

Lorsque $A/B \rightarrow \infty$
alors A devient infiniment plus gros que B

Lorsque $A/B \rightarrow \ell$
alors A et B sont sur le même trait
Mais n'ont pas forcément le même OdG

Exercice 2. [Correction] Déterminer, quand $n \rightarrow \infty$, la limite des expressions suivantes et Bonus leur équivalent

$$u_n = n^2 + (1 - 2n)^3$$

$$u_n = \frac{(1 + 2n)^3 + (1 - 2n)^3}{2^n + 3^n}$$

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{n}{3n^3 + 2n + 1}$$

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{4}{n + 1}$$

$$u_n = \frac{n \ln(n) + n^2}{2^{-n} + \ln(n)}$$

$$u_n = \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$$

$$u_n = \frac{2^{-n} + 3^{-n}}{2^n + 3^n}$$

$$u_n = \frac{n^3 + 3^n}{2^{2n}}$$

$$u_n = \frac{(n + 1) \sin(n)}{n^2 + 1}$$

$$u_n = \frac{\ln(n + 1)}{n}$$

$$u_n = 2^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right)$$

$$u_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$u_n = 3n \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

$$u_n = \sqrt{n^2 + n} - n$$

$$u_n = n^{\sin(n)/n}$$

— Quand $x \rightarrow 0$ ou $x \rightarrow \pm\infty$ ou $x \rightarrow a$ —

Exercice 3. [Correction] Placer sur un axe du plus Gros au plus petit

petit

Gros

Quand $x \rightarrow 0$.

$$> x, 1 \text{ et } \sqrt{x} \text{ et } x^2 \text{ et } x\sqrt{x}$$

$$> \frac{1}{x^2} \text{ et } 3 \text{ et } \frac{1}{x\sqrt{x}} \text{ et } \frac{2}{x}$$

$$> \frac{3}{x^2} \text{ et } \frac{1}{2x^2} \text{ et } \frac{1}{x^2} \text{ et } \frac{1}{x} \text{ et } x \text{ et } e^x$$

$$> \ln(x) \text{ et } \ln(x^2) \text{ et } \ln^2(x).$$

$$> \ln(x) \text{ et } \ln(2x) \text{ et } \ln(x+2) \text{ et } 2\ln(x).$$

$$> 1 \text{ et } e^{x+1} \text{ et } \ln(1+x) \text{ et } \sin(2x) \text{ et } \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Les mêmes quand $x \rightarrow +\infty$ et quand $x \rightarrow -\infty$

Rappel :

Lorsque $A/B \rightarrow 0$

alors B devient infiniment plus gros que A

Lorsque $A/B \rightarrow \infty$

alors A devient infiniment plus gros que B

Lorsque $A/B \rightarrow \ell$

alors A et B sont sur le même trait

Mais n'ont pas forcément le même OdG

Exercice 4. [Correction] Calculer les limites suivantes quand $x \rightarrow a$ et Bonus leur équivalent

1. $f(x) = x^5 - 3x^2 + 1$ avec $a = \pm\infty, 0, 1$

2. $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 + x + 3}{x + 1}\right)$ avec $a = \pm\infty, 0, 3, -1$

3. $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right)$ avec $a = 0, 1^-, -1^+$

4. $f(x) = x^2 e^{-x}$ avec $a = \pm\infty, 0, +1$

5. $f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x - 1}$ avec $a = \pm\infty, 0^+, +1$

6. $f(x) = \frac{e^x + x^4}{e^{-x} + x}$ avec $a = \pm\infty, 0, +1$

7. $f(x) = x + \ln(x+3)$ avec $a = +\infty, 0, -3$

8. $f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ avec $a = +\infty, 0^+$

_____ a^{bouve} _____

Exercice 5. [Correction]

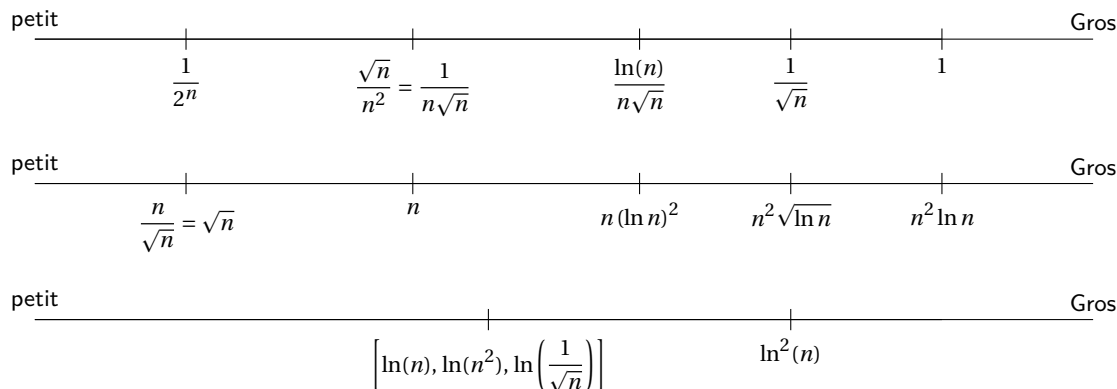
1. Calculer la limite de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ quand $n \rightarrow \infty$

2. Calculer la limite de $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ quand $x \rightarrow 0^+$

3. Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer la limite de $\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}$ quand $x \rightarrow 0^+$

Correction.

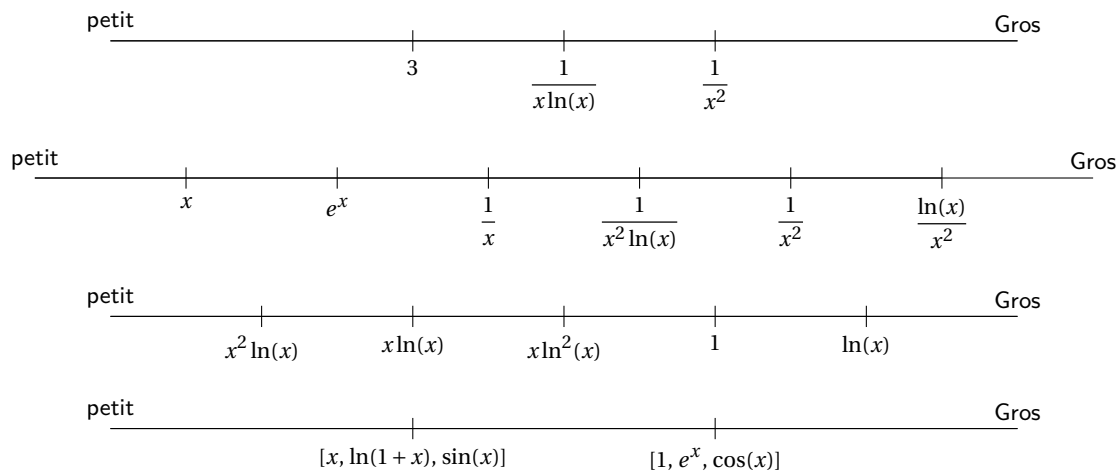
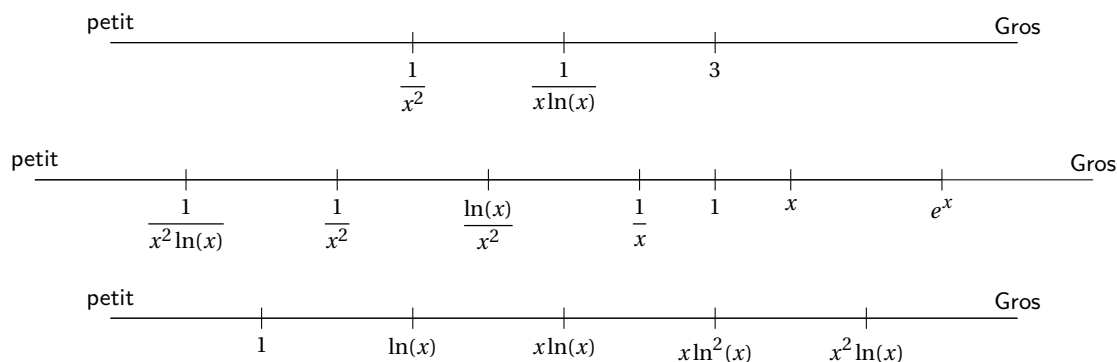
Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

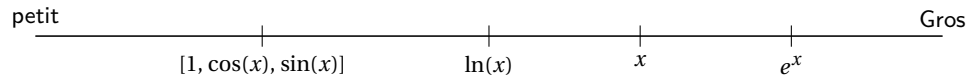
Quand $n \rightarrow \infty$, on a

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

$$\begin{aligned}
 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) &= 2^n \sin(\square) \\
 &= 2^n [\square + o(\square)] \\
 &= 2^n \left[\frac{\pi}{2^n} + o\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \right] = \pi + o(1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi
 \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

Quand $x \rightarrow 0$, on aQuand $x \rightarrow \infty$, on a

**Solution de l'exercice 4 (Énoncé)**

$$\begin{aligned}
 & \lim \ln \left(\frac{x^2 + x + 3}{x + 1} \right) \\
 & > \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x^2 + x + 3}{x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x^2 + o(x^2)}{x + o(x)} \right) = \infty \\
 & > \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(\frac{x^2 + x + 3}{x + 1} \right) = \ln \left(\frac{0^2 + 0 + 3}{0 + 1} \right) = \ln(3) \\
 & > \lim_{x \rightarrow (-1)} \ln \left(\frac{x^2 + x + 3}{x + 1} \right) = \ln \left(\frac{(-1)^2 + (-1) + 3}{(-1) + 1} \right) = \frac{3}{0} = \pm \infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \lim \ln \left(\frac{1 - x}{x + 1} \right) \\
 & > \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(\frac{1 - x}{x + 1} \right) = \ln \left(\frac{1 - 0}{0 + 1} \right) = \ln(1) = 0 \\
 & > \lim_{x \rightarrow (1^-)} \ln \left(\frac{1 - x}{x + 1} \right) = \ln \left(\frac{1 - (1^-)}{(1^-) + 1} \right) = \ln \left(\frac{0^+}{2} \right) = -\infty \\
 & > \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \ln \left(\frac{1 - x}{x + 1} \right) = \ln \left(\frac{1 - (-1)^+}{(-1)^+ + 1} \right) = \ln \left(\frac{2}{0^+} \right) = +\infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \lim \frac{e^{2x} + 1}{e^x - 1} \\
 & > \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} + 1}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} + o(e^{2x})}{e^x + o(e^x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}[1 + o(1)]}{e^x[1 + o(1)]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \frac{[1 + o(1)]}{[1 + o(1)]} = +\infty \\
 & > \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} + 1}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + o(1)}{-1 + o(1)} = \frac{1}{-1} = -1 \\
 & > \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{2x} + 1}{e^x - 1} = \frac{e^2 + 1}{e - 1} \\
 & > \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + 1}{e^x - 1} = \frac{e^0 + 1}{e^0 - 1} = \infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \lim \frac{e^x + x^4}{e^{-x} + x} \\
 & > \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x^4}{e^{-x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + o(e^x)}{x + o(x)} = \infty \\
 & > \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + x^4}{e^{-x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + o(x^4)}{e^{-x} + o(e^{-x})} = 0 \\
 & > \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + x^4}{e^{-x} + x} = \frac{e^0 + 0^4}{e^{-0} + 0} = \frac{1}{1} = 1
 \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \\
 &= e^{x \ln(1 + \square)} \\
 &= e^{x(\square + o(\square))} = e^{x\left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = e^{1 + o(1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^1 = e
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x} &= \exp\left(\frac{1}{x} \ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)\right) \\
 &= \exp\left(\frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^{x \ln a} + e^{x \ln b}}{2}\right)\right) \\
 &= \exp\left(\frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^\square + e^{\square'}}{2}\right)\right) \\
 &= \exp\left(\frac{1}{x} \ln\left(\frac{(\square + o(\square)) + (\square' + o(\square'))}{2}\right)\right) \\
 &= \exp\left(\frac{1}{x} \ln\left(\frac{2 + (\ln a + \ln b)x}{2}\right)\right) \\
 &= \exp\left(\frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{\ln a + \ln b}{2}x\right)\right) \\
 &= \exp\left(\frac{1}{x} \ln(1 + \square)\right) \\
 &= \exp\left(\frac{1}{x}(\square + o(\square))\right) \\
 &= \exp\left(\frac{1}{x}\left(\frac{\ln a + \ln b}{2}x + o(x)\right)\right) \\
 &= \exp\left(\frac{\ln a + \ln b}{2} + o(1)\right) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{\ln a + \ln b}{2}\right) = \exp\left(\ln(\sqrt{ab})\right) = \sqrt{ab}
 \end{aligned}$$