TD 13 Suite. Jeudi 05 Décembre 2024 autonomie car grève.

Exercice 1. [Correction] Soit les suites (c_n) et (s_n) définies par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ c_n = \cos(n)$ et $s_n = \sin(n)$

1. On va démontrer que la suite (c_n) ne converge pas dans $\mathbb{R}$.
   On fait un R.A. *On suppose que la suite (c_n) converge vers ℓ, i.e.* $c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$.
   (a) Calculer $c_{n+1} - c_{n-1}$ en fonction de $\sin(n)$
   En déduire $\sin n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. (On admet que $\sin 1 \neq 0$).
   (b) Simplifier $s_{n+1} - s_{n-1}$. En déduire la valeur de ℓ.
   (c) Trouver une contradiction. Conclure.
2. Démontrer que la suite (c_n) ne diverge pas vers $\pm\infty$

Conclusion : la suite (c_n) est chaotique.

Exercice 2. [Correction] Soit les suites (c_n) définie par $\forall\, n \in \mathbb{N},\ c_n = \cos(n)$

On va démontrer avec un RA que la suite (c_n) ne converge pas dans $\mathbb{R}$.

On suppose que la suite (c_n) converge vers ℓ, CàD $c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ c_{n+2} = 2\cos(1)\, c_{n+1} - c_n$
   En déduire que $\ell = 0$.
2. Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ c_{2n} = 2\, c_n^2 - 1$
   En déduire une absurdité

Un exo sympa

Exercice 3. [Correction] Soit (u_n) la suite définie par :

$$0 < u_1 \leqslant u_2 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{1}{n} u_n.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive puis que la suite (u_n) est croissante.
2. On suppose que la suite (u_n) converge vers ℓ.
   Comme la suite (u_n) est croissante, on a forcément $0 < u_1 \leqslant u_2 \leqslant \ldots \leqslant u_n \leqslant \ldots. \leqslant \ell$
   (a) Montrer qu'il existe N_0 tel que $\forall\, n \geqslant N_0,\ u_n - u_{n-1} \geqslant \dfrac{\ell}{2n}$
   (b) En déduire une minoration de u_n en fonction de H_n, la suite harmonique
   En déduire une contradiction.

Conclusion : Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et ne converge pas dans $\mathbb{R}$
la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$

Correction.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé) Un exo sympa.

1. On a

$$c_{n+1} - c_{n-1} = \cos(n+1) - \cos(n-1) \begin{aligned}[t] &= \cos(a+b) - \cos(a-b) \\ &= -2\sin a \sin b \\ &= -2.\sin n.\sin 1 \end{aligned}$$

   Comme $\sin 1 \neq 0$, on a

$$s_n = \sin n = \frac{\cos(n+1) - \cos(n-1)}{-2\sin 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\ell - \ell}{-2\sin 1} = 0$$

2. On a facilement

$$s_{n+1} - s_{n-1} = \sin(n+1) - \sin(n-1) = \ldots = 2\sin 1 \cos n.$$

   Ainsi

$$\cos n = \frac{\sin(n+1) - \sin(n-1)}{2\sin 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{0-0}{-2\sin 1} = 0$$

   On a $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ et $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc par unicité de la limite $\ell = 0$

3. Or on sait que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \cos^2(n) + \sin^2(n) = 1$,

   On regarde ce que devient la relation quand $n \to \infty$, CàD

$$\left.\begin{array}{r} \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \cos^2(n) + \sin^2(n) = c_n^2 + s_n^2 = 1 \\ c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{array}\right\} \implies \begin{array}{l} \text{À la limite, quand } n \to \infty, \\ \quad \text{la relation devient } 0^2 + 0^2 = 1 \text{ OUS} \end{array}$$

   Conclusion : La suite (c_n) ne converge pas dans $\mathbb{R}$.

4. Comme $c_n = \cos n \in [-1, 1]$, on ne peut pas avoir $c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \pm\infty$.

   Conclusion : la suite est chaotique.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$2\,\cos(1)\, c_{n+1} = 2\,\cos(1)\cos(n+1) = 2C_aC_b = \cos(a+b) + \cos(a-b) = \cos(n+2) + \cos(n)$$

   Donc on a bien $\forall\, n \in \mathbb{N},\ c_{n+2} = 2\,\cos(1)\, c_{n+1} - c_n$

   On regarde ce que devient la relation quand $n \to +\infty$

   Ainsi on a $\ell = 2\,\cos(1)\,\ell - \ell \implies \ell = 0$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$c_{2n} = \cos(2n) = \cos(n+n) = \cdots = 2\cos^2(n) - 1 = 2\,c_n^2 - 1$$

   On regarde ce que devient la relation quand $n \to +\infty$

   Ainsi on a : $\ell = 2\ell^2 - 1 \iff \ell = 1$ ou $\ell = {}^{-1}/_{2}$

   C'est oups car $0 \neq 1$ et $\mathcal{O} \neq {}^{-1}/_{2}$

   Conclusion : la suite (c_n) ne converge pas vers $\ell \in \mathbb{R}$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé) Correction rapide

1. On montre facilement par récurrence (2étages) $H_{<n>} :\ u_n > 0$

   Ainsi Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1}\, u_{n-1} > 0$

   Donc la suite (u_n) est croissante.

2. On suppose que la suite (u_n) converge vers ℓ.
   Comme la suite (u_n) est croissante, on a forcément $0 < u_1 \leqslant u_2 \leqslant ... \leqslant u_n \leqslant .... \leqslant \ell$

   (a) On a

   $$Q_n = \frac{u_n - u_{n-1}}{\ell/_{2n}} = \frac{2n}{\ell}\frac{u_{n-2}}{n-2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2\ell}{\ell \neq 0} 2 = 2 \qquad \textit{car } \frac{n}{n-2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

   On applique la def de $Q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$ avec $\varepsilon = 1$

   Ainsi existe N_0 tel que $\forall n \geqslant N_0,\ Q_n \geqslant \ell - \varepsilon = 2 - 1 = 1$ fini

   (b) on a "à la mode géo"

   $$\begin{aligned} u_n \geqslant u_{n-1} + \frac{\ell}{2n} &\geqslant \left(u_{n-2} + \frac{\ell}{2(n-1)}\right) + \frac{\ell}{2n} \\ &\vdots \\ &\geqslant \left(u_{N_0} + \frac{\ell}{2(N_0+1)}\right) + \cdots + \frac{\ell}{2(n-1)} + \frac{\ell}{2(n)} \\ &\geqslant u_{N_0} + \frac{\ell}{2}\left(H_n - H_{N_0}\right) \quad \textit{Rappel : } H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

   Ainsi on a (thm de comparaison) $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ OUPS ! ! !

   Conclusion : Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et ne converge pas dans $\mathbb{R}$
   la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$