

Suites Extraites.

<p>1 Définition et exemples.</p> <p>2 Ce que l'on doit savoir</p> <p>2.1 Convergence et suites extraites.</p>	<p>1</p> <p>2</p> <p>2</p>	<p>2.2 Suite chaotique.</p> <p>3 Niveau Supérieur : Bolzano-Weierstrass, Cesàro</p> <p>3.1 Non-Majorée.</p> <p>3.2 Bolzano-Weierstrass.</p> <p>3.3 Cesàro</p>	<p>3</p> <p>4</p> <p>4</p> <p>4</p> <p>5</p>
---	---	---	---

1 Définition et exemples.

Définition 1. Suite extraite.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. On sait que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la liste des nombres

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_{1492}, \dots, u_{10^{24}}, \dots)$$

Une suite extraite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite obtenue :

- > On prend une partie seulement des termes de la suite.
- > On respecte l'ordre d'apparition.

Conclusion : une suite extraite est constituée de termes de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dont on garde l'ordre d'apparition, et sans répétition d'indice.

Théorème 2. Présenter une suite extraite

> visualiser les indices.

Une suite extraite est constituée de termes de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dans l'ordre, et sans répétition d'indice,

Càd c'est une liste de la forme $(u_{n_0}, u_{n_1}, u_{n_2}, \dots, u_{n_k}, \dots)$ avec $n_0 < n_1 < \dots < n_k < n_{k+1}$

Conclusion : une suite extraite, c'est $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ avec $\forall k \in \mathbb{N}, n_k < n_{k+1}$

> Via une fonction extractrice

La présentation ci dessus est un peu lourde car u_{n_k} c'est 3 lettres!!!!

Pour alléger, on peut utiliser la fonction d'extraction ou extractrice définie par

$$\varphi : k \mapsto \varphi(k) = n_k \text{ avec } \varphi \text{ strict croissante car } \varphi(k) = n_k < n_{k+1} = \varphi(k+1)$$

Conclusion : une suite extraite, c'est $(u_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ avec $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ strict croissante

Exemples

> La suite extraite des termes pairs $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, CàD $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}} = (u_0, u_2, u_4, \dots, u_{2n}, \dots)$

Ici les indices extraits sont 0, 2, 4, ..., 1492, ... et l'extractrice c'est $\varphi : n \mapsto 2n$

> La suite extraite des termes impairs $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, CàD $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}} = (u_1, u_3, u_5, \dots, u_{2n+1}, \dots)$

Ici les indices extraits sont 1, 3, 5, ..., 41, ... et l'extractrice c'est $\varphi : n \mapsto 2n + 1$

> La suite extraite $(u_{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$, CàD $(u_{n^2})_{n \in \mathbb{N}} = (u_0, u_1, u_4, u_9, \dots, u_{n^2}, \dots)$

> La suite extraite $(u_{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$, CàD $(u_{2^n})_{n \in \mathbb{N}} = (u_1, u_2, u_4, u_8, u_{16}, \dots, u_{2^n}, \dots)$

> La suite extraite $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}} = (u_1, u_2, u_3, u_4, \dots)$ est aussi une suite extraite.

> Un dernier exemple : $(u_p)_{p \text{ est premier}} = (u_2, u_3, u_5, u_7, u_{11}, \dots, u_{41}, \dots)$

Ici les indices extraits sont les "indices premiers", CàD 2, 3, 5, 7, 11, 13, ..., 41, ... mais il n'y a pas d'extractrice explicite.

2 Ce que l'on doit savoir

2.1 Convergence et suites extraites.

Théorème 3. Convergence et suites extraites.

Le sens naturel.

Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$

Alors toutes les suites extraites de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la même limite ℓ , CàD

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell \implies \begin{cases} u_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell \\ u_{2n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell \\ u_{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell \end{cases}$$

Plus généralement $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell \implies u_{\square} \xrightarrow[\square \rightarrow \infty]{} \ell$

Le sens plus subtil.

$$\left. \begin{array}{l} \text{La suite } (u_{2n})_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \\ \text{La suite } (u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \\ \text{Les suites extraites contiennent l'intégralité des termes de la suite} \end{array} \right\} \implies \implies \text{Le suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell$$

On peut généraliser avec les 3 suites $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{3n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{3n+2})_{n \in \mathbb{N}}$

Démonstration : On va faire une démonstration audacieuse du sens plus subtil.

> On sait que $\max(a, b)$ et $\min(a, b)$ s'exprime avec les fonctions usuelles.

En effet

$$\max(a, b) = \frac{a+b}{2} + \frac{1}{2}|a-b| \quad \text{et} \quad \min(a, b) = \frac{a+b}{2} - \frac{1}{2}|a-b|$$

ainsi $M_n = \max(u_{2n}, u_{2n+1}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \max(\ell, \ell) = \ell$ et $m_n = \min(u_{2n}, u_{2n+1}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \min(\ell, \ell) = \ell$

> De plus on a

$$m_{\lfloor n/2 \rfloor} \leq u_n \leq M_{\lfloor n/2 \rfloor}$$

Donc (théorème des gendarmes) on a $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$

2.2 Suite chaotique.

Théorème 4. Suite chaotique

Soit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On suppose que l'on a trouvé 2 suites extraites qui convergent vers 2 limites $\ell \neq \ell'$

Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est chaotique.

Exemples. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$.

> D'une part. $u_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$. Donc la suite extraite des termes pairs converge vers 1.

> D'autre part. $u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -1$. Donc la suite extraite des termes impairs converge vers -1 .

Conclusion : la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est chaotique (mais très régulière).

Théorème 5. Complément sur les suites chaotiques

On suppose que : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$

la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est chaotique

alors la suite $(u_n + v_n)$ est chaotique.

Rq : Le résultat est faux si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers ∞ , par exemple $n + (-1)^n$

Démonstration : C'est à peu près évident mais démonstration directe est n'est pas très clair.

En fait c'est facile avec un RA.

On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ℓ , la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est chaotique et la suite $(u_n + v_n)$ N'est PAS chaotique.

Comme $(u_n + v_n)$ N'est PAS chaotique, on a : Soit $(u_n + v_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell'$, Soit $(u_n + v_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$

> Situations $(u_n + v_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell'$.

On a $v_n = (u_n + v_n) - u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell' - \ell$.

Donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas chaotique car elle converge vers $\ell' - \ell$. OUPS!!!

> Situations $(u_n + v_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$.

On a $v_n = (u_n + v_n) - u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty - \ell = \infty$.

Donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas chaotique car elle diverge vers ∞ . OUPS!!!

3 Niveau Supérieur : Bolzano-Weierstrass, Cesàro

3.1 Non-Majorée.

Les suites extraites permettent de traduire, visualiser des infos "non habituelle" difficile à exploiter.

Théorème 6. Non-Majorée

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite Non-Majorée.

Ainsi avec la négation de la def de majorée, on a

CàD Pour tout M , il existe n_0 avec $u_{n_0} > M$

Cet énoncé est difficile à utiliser mais on a l'équivalence suivante

(i) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est Non-Majorée.

(ii) il existe une suite extraite $(u_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ ou $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tel que $u_{\varphi(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} +\infty$

Démonstration : le sens (ii) \Rightarrow (i) est facile. Pour tout M , on applique la def de $u_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} +\infty$ avec M

le sens (i) \Rightarrow (ii) est plus intéressant

On applique la définition de Non-Majorée avec $M = k \in \mathbb{N}$ ainsi, il existe n_k tel que $u_{n_k} > k$

On obtient ainsi une suite $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$

MAIS à priori les indices n_k ne sont pas par ordre strictement croissant.

Maintenant on va ruser

On justifie qu'il y a forcément une infinité d'indice différent.

On les classe par ordre croissant (il pourrait y avoir des répétitions)

On les choisit dans cet ordre et sans doublon

Reste à voir que cette suite qui est une suite extraite diverge vers $+\infty$

3.2 Bolzano-Weierstrass.

Théorème 7. Bolzano-Weierstrass.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite Bornée.

Alors il existe une suite extraite $(u_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ ou $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$

Théorème 8. Généralisation : Bolzano-Weierstrass.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite.

Alors il existe une suite extraite $(u_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ ou $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$

qui converge dans \mathbb{R} ou qui diverge vers $\pm\infty$

Démonstration : Il y a 2 situations : Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est Non-bornée

Lorsque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée

C'est facile on applique la théorème de Bolzano-Weierstrass,

ainsi il existe une suite extraite $(u_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ ou $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge dans \mathbb{R}

Lorsque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est Non-bornée

Comme bornée c'est majorée et minorée, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est Non-Majorée ou Non-minorée

- Lorsque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est Non-Majorée, on utilise le théorème ci dessus

ainsi il existe une suite extraite $(u_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ ou $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui diverge vers $+\infty$

- Lorsque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est Non-minorée, on utilise le théorème ci-dessus

ainsi il existe une suite extraite $(u_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ ou $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui diverge vers $-\infty$

Application : On peut maintenant démontrer la réciproque du théorème 3, c'est la caractérisation séquentielle des limites

CàD : Si toutes les suites extraites qui convergent, convergent vers la même limite, alors la suite converge.

Il y a beaucoup trop de converge, beaucoup trop de mot compliqué (réciproque, caractérisation, séquentielle, extraites), donc BLI

3.3 Cesàro

Théorème 9. Cesàro et son final

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui converge vers ℓ .

$$\text{Alors la moyenne } S_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$$

Plan de la démonstration : Pour tout $\varepsilon > 0$.

Q1. Montrer que : $\exists K, \exists N_0$ tq $\forall n \geq N_0, |S_n - \ell| \leq \frac{K}{n} + \frac{n - N_0 + 1}{n} \varepsilon$

Q2 *Final de Cesàro*. En déduire qu'il existe N_1 tq $\forall n \geq N_0, |S_n - \ell| \leq 2\varepsilon$. Conclure.

Réponse à Q1

On commence par un calcul "classique" : Mariage puis Inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} |S_n - \ell| &= \left| \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} - \ell \right| \\ &= \left| \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n - n\ell}{n} \right| \\ &= \frac{1}{n} \left| (u_1 - \ell) + (u_2 - \ell) + \dots + (u_n - \ell) \right| \\ &\quad \text{Inégalité triangulaire} \\ &\leq \frac{1}{n} \left(|u_1 - \ell| + |u_2 - \ell| + \dots + |u_n - \ell| \right) \end{aligned}$$

J'applique la définition de $|u_n - \ell| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ avec $\varepsilon > 0$,

Ainsi $\exists N_0$ tq $\forall k \geq N_0, |u_k - \ell| \leq \varepsilon$

On somme cette inégalité de $k = N_0$ à $k = n$, ainsi $\sum_{k=N_0}^n |u_k - \ell| \leq \sum_{k=N_0}^n \varepsilon = (n - N_0 + 1)\varepsilon$

$$\text{Conclusion : } |S_n - \ell| \leq \frac{1}{n} \left(\underbrace{\sum_{k=1}^{N_0-1} |u_k - \ell|}_{=K} + (n - N_0 + 1)\varepsilon \right) = \frac{K}{n} + \frac{n - N_0 + 1}{n} \varepsilon$$

Réponse à Q2 et final de Cesàro

On est dans la situation suivante :

$$\begin{cases} |S_n - \ell| \leq M_n \\ \text{et} \\ M_n = \frac{K}{n} + \frac{n - N_0 + 1}{n} \varepsilon \end{cases}$$

Ça ressemble au théorème de la distance mais

$$\text{MAIS la majoration } M_n = \frac{K}{n} + \frac{n - N_0 + 1}{n} \varepsilon \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varepsilon \neq 0,$$

donc ce n'est pas le théorème de la distance!!!!

Voici le final de Cesàro

J'applique la définition de $M_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L = \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$,

Ainsi il existe N_1 tel que $\forall n \geq N_1, M_n \leq L + \varepsilon = \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

$$\begin{aligned} \text{Conclusion : il existe } N_1 \text{ tel que } \forall n \geq N_1, |S_n - \ell| \leq M_n \leq 2\varepsilon \\ \text{CàD on a vérifié la def de } |S_n - \ell| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ CàD de } S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell. \end{aligned}$$

— Adapter la démonstration de Cesàro —

Exercice 1. [Correction] Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $+\infty$.

$$\text{Alors la moyenne } S_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

Exercice 2. [Correction] Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui converge vers ℓ .

$$\text{Alors la moyenne } S_n = \frac{u_1 + \frac{u_2}{2} + \dots + \frac{u_n}{n}}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$$

Exercice 3. [Correction] *Plus difficile*

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui converge vers ℓ .

$$\text{Alors la moyenne } S_n = \frac{\binom{n}{0}u_0 + \binom{n}{1}u_1 + \dots + \binom{n}{n}u_n}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$$

Exercice 4. *Vraiment plus difficile* Soient deux suites réelles (a_n) et (b_n) qui convergentes de limites respectives a et b .

$$\text{Montrer que : } \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ab$$

———— Utiliser le thm de Cesàro ————

Exercice 5. [Correction] Montrer que : Si $u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$, Alors $\frac{u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$

Exercice 6. [Correction] *Voir correction* Soient deux suites réelles (a_n) et (b_n) qui convergentes de limites respectives a et b .

$$\text{Montrer que : } \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ab$$

Correction.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé) Plan de la démonstration : Pour tout $A > 0$.

Q1. Montrer que : $\exists K, \exists N_0$ tq $\forall n \geq N_0, S_n \geq \frac{K}{n} + \frac{n - N_0 + 1}{n} A$

Q2 *Final de Cesàro*. En déduire qu'il existe N_1 tq $\forall n \geq N_0, S_n \geq A - 1$. Conclure.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé) On utilise $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.

Plan de la démonstration : Pour tout $\varepsilon > 0$.

Q1. Montrer que : $\exists K, \exists N_0$ tq $\forall n \geq N_0, |S_n - \ell| \leq \frac{K}{H_n} + \frac{H_n - H_{N_0-1}}{H_n} \varepsilon$

Q2 *Final de Cesàro*. En déduire qu'il existe N_1 tq $\forall n \geq N_0, |S_n - \ell| \leq 2\varepsilon$. Conclure.

Solution de l'exercice 3 (Énoncé) On utilise $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$ et aussi les coefficients du binôme sont croissants puis décroissants.

Plan de la démonstration : Pour tout $\varepsilon > 0$.

Q1. Montrer que : $\exists K, \exists N_0$ tq $\forall n \geq N_0, |S_n - \ell| \leq \frac{K \binom{n}{N_0}}{2^n} + \varepsilon$

Q2. Justifier $\frac{K \binom{n}{N_0}}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Q3 *Final de Cesàro*. En déduire qu'il existe N_1 tq $\forall n \geq N_0, |S_n - \ell| \leq 2\varepsilon$. Conclure.

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

Comme la suite $a_n = u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$, on sait d'après les thm de Cesàro, que

$$A_n = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$$

Or $\sum_{k=1}^n a_k = \text{télescopage} = u_{n+1} - u_1$

Conclusion : $\frac{u_{n+1} - u_1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$ ainsi (à méditer) $\frac{u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$

Solution de l'exercice 6 (Énoncé) On fait dans l'ordre les situations suivantes

$> a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$ avec le thm de la distance et on majore $|b_n|$ par $|b| + 1$ et on utilise Cesàro

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) \right| &\leq \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^n |a_k| |b_{n-k}| \right) \\ &\leq (|b| + 1) \underbrace{\frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^n |a_k| \right)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ Cesàro}} \end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 = 0 \cdot b$

$> a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ et $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$ on écrit/remplace $a_n = a + \varepsilon_n$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) &= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^n (a + \varepsilon_n) b_{n-k} \right) \\ &= a \underbrace{\frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^n b_{n-k} \right)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \text{ C'est Cesàro}} + \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^n \varepsilon_n b_{n-k} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ab + 0 = ab \end{aligned}$$