DM 11 / TD. De l'usage des suites extraites.

Exercice 1. [Correction]

1. On considère la suite (S_n) définie par
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}.$$
   (a) Montrer que : $\forall\, k \geqslant 2,\ \dfrac{1}{2k^2} - \dfrac{1}{2(k+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{k^3} \leqslant \dfrac{1}{2(k-1)^2} - \dfrac{1}{2k^2}$

   (b) En déduire que la suite (S_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$

   (c) Encadrement de $(S_n - \ell)$

      i. En utilisant Q1., montrer que pour tout $p, n \in \mathbb{N}^*$ avec $1 \leqslant n \leqslant p$
$$\frac{1}{2\,(n+1)^2} - \frac{1}{2\,(p+1)^2} \leqslant S_p - S_n \leqslant \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2p^2}.$$
      ii. En déduire un encadrement que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \ell - S_n \leqslant \dfrac{1}{2\,n^2}$

2. On considère la suite (A_n).
$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3} \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+1)^3} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{truc} \frac{1}{k^3}$$
   (a) Montrer que (A_{2n}) et (A_{2n+1}) sont adjacentes.

   (b) En déduire que (A_n) converge

      On note a la limite de la suite (A_n)

3. Trouver Lien entre ℓ et a.

   Indication : On remarque que : $S_n = \displaystyle\sum_{\substack{k=1\\ \text{pair}}}^{n} .... + \sum_{\substack{k=1\\ \text{impair}}}^{n} ....$ et $A_n = -\displaystyle\sum_{\substack{k=1\\ \text{pair}}}^{n} .... + \sum_{\substack{k=1\\ \text{impair}}}^{n} ....$

   De plus $\displaystyle\sum_{\substack{k=1\\ \text{pair}}}^{n} ....$ se calcule ....Yes.

Exercice 2. [Correction] Soit la fonction f définie par $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = -x^2 + 2x + 1$
et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite finie λ,
   alors λ ne peut prendre que 2 valeurs ℓ_1 et ℓ_2 avec $\ell_1 < 0 < 1 < \ell_2 < 2$.

On suppose que : $u_0 \in]1, \ell_2[$.

2. Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ , 1 < u_n < 2$.
3. Étude de la suite extraite des indices pairs.
   On considère $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{2n}$.
   (a) Prouver que, pour tout entier naturel, $v_{n+1} = [f \circ f](v_n)$
   (b) Justifier que la fonction $f \circ f$ est croissante sur $[1, 2]$
   (c) Étude de $f \circ f(x) - x$
      i. Pour tout réel x, calculer $[f \circ f](x)$ puis déterminer a et b réels tels que, pour tout réel x,
      $$[f \circ f](x) - x = \left(-x^2 + x + 1\right)\left(x^2 + ax + b\right)$$
      ii. Déterminer les valeurs du réel x telles que $[f \circ f](x) - x = 0$
      et le signe de $f \circ f(x) - x$ pour x appartenant à l'intervalle $[1, 2]$.
   (d) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
      puis que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1
4. Étude de la suite extraite des indices impairs.
   On considère $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall\, n \in \mathbb{N},\ w_n = u_{2n+1}$.
   Déterminer le lien entre w_n et v_n.
   En déduire que la suite (w_n) converge vers 2. (**Ne** surtout **pas** refaire toutes la question Q3, utiliser le lien entre w_n et v_n.)
5. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est chaotique.
6. Une explication plus difficile. On oublie les questions Q3., Q4., Q5.
   On va démontrer que l'hyp "la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge" est absurde.

   On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

   (a) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_2 et vérifier que $f'(\ell_2) > 1$
   (b) Justifier que $\left|\dfrac{u_{n+1} - \ell_2}{u_n - \ell_2}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} |f'(\ell_2)|$.
      C'est la question "difficile" : Il y a deux façons : Du calcul ou bien Sans calcul avec un taux.
   (c) En déduire qu'il existe $k > 1$ et N_0 tel que $\forall\, n \geqslant N_0,\ |u_{n+1} - \ell_2| \geqslant k\,|u_n - \ell_2|$
   (d) En déduire que la suite $\Big(|u_n - \ell_2|\Big)_{n\in,\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
   (e) Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est chaotique..

Exercice 3. [Correction] On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 > 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = \frac{1}{u_n + \frac{1}{n+1}}.$$

On rappelle/admet que la suite harmonique (H_n) diverge vers $+\infty$, CàD $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$.
2. Déterminer ses limites possibles de la suite (u_n).
3. Montrer que $\forall\, n \geqslant 1,\ u_{2n-1} < 1$ et $u_{2n} > 1$.
   > La question est plus difficile qu'il n'y parait.
   > Il est clair que l'on va précéder par récurrence. CàD on fait par récurrence
   $$H\langle n\rangle : |u_{2n-1} < 1 \text{ et } u_{2n} > 1$$
   > L'initialisation $H\langle 1\rangle$, CàD $u_1 < 1$ (facile) et $u_2 > 1$ (délicat) n'est pas absolument évidente et pour bien réussir $H\langle n\rangle \Rightarrow H\langle n+1\rangle$, il faut comprendre pourquoi $H\langle 1\rangle$ n'est pas évident et pourquoi $H\langle 1\rangle$ est vrai.
   > Ce n'est pas parce que vous ne faites pas cette question que la suite est difficile.
4. On admet le gros calcul suivant que
$$\begin{aligned}\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - u_n &= \frac{1}{u_{n+1} + \frac{1}{n+2}} + u_n \\ &= \frac{1}{\frac{1}{u_n + \frac{1}{n+1}} + \frac{1}{n+2}} + u_n = \cdots = \frac{n\left(1-u_n^2\right) + \left(-u_n^2 - u_n + 2\right)}{n^2 + n\,(3+u_n) + (3+u_n)}\end{aligned}$$
   Donc il n'y a pas question !!!!
5. Étude de la suite extraite des termes impairs (u_{2n+1}).
   Rappelons que : à la question Q3, on a démontré que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 < u_{2n+1} < 1)$
   (a) Étudier la monotonie de la suite extraite (u_{2n+1}).
   En déduire que la suite (u_{2n+1}) converge vers $0 < \ell \leqslant 1$.
   (b) On suppose que $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \underset{\text{Strict}}{<} 1$.
      i. En utilisant $Q4.$, montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et N_0 tel que
      $$\forall\, n \geqslant N_0,\ u_{2n+1} - u_{2n-1} \geqslant \frac{\alpha}{n} > 0$$
      ii. En déduire une minoration de u_{2n+1} en fonction de H_n.
      iii. En déduire une contradiction. Que peut-on conclure ?
6. Montrer (sans calcul ou presque) que $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé) On considère la suite (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}.$$

1. Étude de (S_n)

   (a) Convergence de la suite (S_n).

   i. Montrer que : $\forall\, k \geqslant 2,\ \dfrac{1}{2k^2} - \dfrac{1}{2(k+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{k^3} \leqslant \dfrac{1}{2(k-1)^2} - \dfrac{1}{2k^2}$

   Facile Gros-petit

   ii. En déduire que la suite (S_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$

   On somme l'inégalité de $k = 2$ à $k = n$

$$\text{ainsi, } \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \left[\frac{1}{2(k-1)^2} - \frac{1}{2k^2}\right]$$

Télescopage

$$\leqslant \frac{1}{2(1)^2} - \frac{1}{2(n)^2} \leqslant \frac{1}{2}$$

   On a donc $\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3} \leqslant 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

   Conclusion : la suite (S_n) est croissante (facile) et majorée par $\dfrac{3}{2}$

   Donc la suite (S_n) converge vers $\ell \leqslant \dfrac{3}{2}$

   (b) Encadrement de $\ell - S_n$

   i. En utilisant Q1., montrer que pour tout $p, n \in \mathbb{N}^*$ avec $1 \leqslant n \leqslant p$, $\dfrac{1}{2\,(n+1)^2} - \dfrac{1}{2\,(p+1)^2} \leqslant S_p - S_n \leqslant \dfrac{1}{2n^2} - \dfrac{1}{2p^2}$.

   On a

$$\begin{aligned} S_p - S_n &= \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \\ &= \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^3} \\ &\leqslant \sum_{k=n+1}^{p} \left[\frac{1}{2(k-1)^2} - \frac{1}{2k^2}\right] \end{aligned}$$

Télescopage

$$\leqslant \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2p^2}$$

   On fait de même pour la minoration

   ii. En déduire un encadrement que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \ell - S_n \leqslant \dfrac{1}{2\,n^2}$

   On regarde ce devient l'encadrement quand $p \longrightarrow \infty$

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{1}{2\,(n+1)^2} - \dfrac{1}{2\,(p+1)^2} \leqslant S_p - S_n \leqslant \dfrac{1}{2n^2} - \dfrac{1}{2p^2} \\ S_p - S_n \xrightarrow{p\to\infty} \ell - S_n \\ \dfrac{1}{2n^2} - \dfrac{1}{2p^2} \xrightarrow{p\to\infty} \dfrac{1}{2n^2} - 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \text{ À la limite quand } p \longrightarrow \infty, \text{ on a } \frac{1}{2\,(n+1)^2} \leqslant \ell - S_n \leqslant \frac{1}{2n^2}$$

2. Étude de (A_n)

   (a) Montrer que (A_{2n}) et (A_{2n+1}) sont adjacentes.

   Facile

(b) En déduire que (A_n) converge C'est du cours.

$$\left.\begin{array}{r} (A_{2n}) \text{ et } (A_{2n+1}) \text{ convergent vers la même limite notée } a \\ \\ (A_{2n}) \text{ et } (A_{2n+1}) \text{ contiennent toutes les termes de la suite.} \end{array}\right\} \Longrightarrow (A_n) \text{ converge vers } A.$$

On note a la limite de la suite (A_n)

3. Trouver Lien entre ℓ et a.

On remarque que $S_n = \sum_{\substack{k=1 \\ \text{pair}}}^{n} \ldots. + \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impair}}}^{n} \ldots.$ et $A_n = -\sum_{\substack{k=1 \\ \text{pair}}}^{n} \ldots. + \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impair}}}^{n} \ldots.$

On a ainsi

$$\begin{aligned} S_n - A_n &= 2\sum_{\substack{k=1 \\ \text{pair}}}^{n} \frac{1}{k^3} \\ &\text{On réindexe avec } k = 2p \\ &= 2\sum_{p=1}^{n/2} \frac{1}{(2p)^3} \\ &= \frac{2}{8}\sum_{p=1}^{n/2} \frac{1}{p^3} = \frac{1}{4} S_{n/2} \end{aligned}$$

On a donc

$$\left.\begin{array}{c} S_n - A_n = \frac{1}{4} S_{n/2} \\ S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \\ A_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \end{array}\right\} \Rightarrow \text{A la limite qd } n\to+\infty \ \ell - a = \tfrac{1}{4}\ell$$

Conclusion : On a $a = \dfrac{3}{4}\ell$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite finie λ, alors λ ne peut prendre que 2 valeurs ℓ_1 et ℓ_2 avec $\ell_1 < 0 < 1 < \ell_2 < 2$.
   On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, ainsi

$$\left.\begin{array}{r} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \\ \textit{Comme la fonction } f \textit{ est continue, } f(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(\ell) \end{array}\right\} \Longrightarrow \textit{Alors on a } \ell = f(\ell)$$

   On résout l'équation

$$\ell = f(\ell) \iff \ell = -\ell^2 + 2\ell + 1 \iff \ell^2 - \ell - 1 = 0 \iff \ell_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \ ou\ \ell_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

   et on a bien $\ell_1 < 0 < 1 < \ell_2 < 2$.
2. Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ , 1 < u_n < 2$.
   On démontre par récurrence $H_{<n>}$: $1 < u_n < 2$

   Initialisation : Comme $\ell_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$, on a bien $1 < u_0 < 2$.
   Hérédité : On suppose $H_{<n>}$ est vraie.

   Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = -2x + 2 = 2(-x+1)$, la fonction f est décroissante sur $[1, 2]$, ainsi

$$\left.\begin{array}{r} 1 < u_n < 2 \\ \textit{la fonction } f \textit{ est décroissante sur } [1,2] \end{array}\right\} \Longrightarrow \underbrace{f(2)}_{=1} < \underbrace{f(u_u)}_{=u_{n+1}} < \underbrace{f(1)}_{=2}$$

   Donc $H_{<n+1>}$ est vraie
3. Étude de la suite extraite des indices pairs.
   On considère $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{2n}$.
   (a) Prouver que, pour tout entier naturel, $v_{n+1} = [f \circ f](v_n)$
   Pour tout n, on a

$$v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = [f\circ f](u_{2n}) = [f \circ f](v_n)$$

$$\boxed{\textbf{Conclusion} : \text{La suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est de la forme } v_{n+1} = h(v_n) \text{ avec } h = f \circ f}$$

   (b) Justifier que la fonction $f \circ f$ est croissante sur $[1, 2]$
   Pour justifier que $f \circ f$ est croissante, on peut calculer $(f \circ f)'$
   ou bien,

$$1 \leqslant x \leqslant x' \leqslant 2 \overset{f \text{ est dé-croissante}}{\Longrightarrow} \underbrace{f(2)}_{=1} \leqslant f(x') \leqslant f(x) \leqslant \underbrace{f(1)}_{=2}$$

$$\overset{f \text{ est dé-croissante}}{\Longrightarrow} \underbrace{f(2)}_{=1} \leqslant f\circ f(x) \leqslant f \circ f(x') \leqslant \underbrace{f(1)}_{=2}$$

   Conclusion : $f \circ f$ est croissante.

   (c) Calculer $[f \circ f](x)$ puis déterminer a et b réels tels que $[f \circ f](x) - x = \left(-x^2 + x + 1\right)\left(x^2 + ax + b\right)$
   On a $[f \circ f](x) = -x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 2$ et

$$\begin{aligned}[f \circ f](x) - x &= -x^4 + 4x^3 - 4x^2 - x + 2 \\ &= \left(-x^2 + x + 1\right)\left(x^2 + ax + 2\right) \\ &= (-x^2 + x + 1)(x^2 - 3x + 2)\end{aligned}$$

   (d) On a

$$\begin{aligned}[f \circ f](x) - x = 0 &\iff (-x^2 + x + 1)(x^2 - 3x + 2) = 0 \\ &\iff -(x - \ell_1)(x - \ell_2)(x - 1)(x - 2) = 0 \\ &\iff x = \ell_1, \ell_2, 1 \ ou\ 2.\end{aligned}$$

   Comme $[f \circ f](x) - x = -(x - \ell_1)(x - \ell_2)(x - 1)(x - 2)$, on a le tableau de signe

x	$-\infty$		ℓ_1		1		ℓ_2		2		$+\infty$
$[f\circ f](x) - x$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

   Ainsi on a : Sur $[1, \ell_2]$, $[f \circ f](x) - x \geqslant 0$ et Sur $[\ell_2, 2]$, $[f \circ f](x) - x \leqslant 0$.

(e) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante puis que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1

Décroissante ? On suit la démarche classique pour les suites récurrentes

> $>$ On commence par démontrer par récurrence $H_{<n>}$: $v_n \in [1, \ell_2]$
>
> C'est facile car $h = f \circ f$ est croissante et $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$.
>
> $>$ On ensuite que $u_1 - u_0 = [f \circ f](u_0) - u_0 \leqslant 0$ car $u_0 \in [1, \ell_2]$
>
> $>$ On démontre facilement par récurrence $H_{<n>}$: $v_{n+1} \leqslant v_n$,

Conclusion : la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Converge ?

La suite est donc décroissante et minorée par 1

donc elle converge vers ℓ avec $1 \leqslant \ell \leqslant v_0 < \ell_2$.

Enfin Comme f est continue les limites de la suites (v_n) vérifient l'équation $[f \circ f](\ell) = \ell$ et on a vue que

$$[f \circ f](x) = x \iff [f \circ f](x) - x = 0 \iff x = \ell_1, \ell_2, 1 \; ou \; 2$$

Conclusion : la suite (v_n) converge vers 1.

4. Étude de la suite extraite des indices impairs.

On a

$$\left.\begin{array}{c} w_{n+1} = f(v_n) \\ v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \\ \text{la fonction } f \text{ est continue} \end{array}\right\} \implies w_{n+1} = f(v_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(1) = 2$$

donc la suite (w_n) converge vers 2.

5. On a trouvé deux suites extraites $(v_n) = (u_{2n})$ et $(w_n) = (u_{2n+1})$ qui convergent vers 2 limites différentes

donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est chaotique.

6. Une explication plus difficile. On oublie les questions Q3., Q4., Q5.

On va démontrer que l'hyp "la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge" est absurde.

On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(a) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_2 et vérifier que $f'(\ell_2) > 1$

On a : d'après Q1. la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égale à ℓ_1 ou ℓ_2

d'après Q2. la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $1 \leqslant \ell \leqslant 2$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_2

(b) Justifier que $\left|\dfrac{u_{n+1} - \ell_2}{u_n - \ell_2}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \left|f'(\ell_2)\right|$.

$>$ Méthode calcule. On a

$$\begin{aligned} \left|\frac{u_{n+1} - \ell_2}{u_n - \ell_2}\right| &= \left|\frac{f(u_n) - f(\ell_2)}{u_n - \ell_2}\right| \\ &= \left|\frac{\left(-u_n^2 + 2u_n + 1\right) - \left(-\ell_2^2 + 2\ell_2 + 1\right)}{u_n - \ell_2}\right| \\ &= \left|\frac{\ell_2^2 - u_n^2 + 2u_n - 2\ell_2}{u_n - \ell_2}\right| \\ &= \left|\frac{(u_n - \ell_2)\left[(-u_n - \ell_2) + 2\right]}{u_n - \ell_2}\right| \\ &= \left|-u_n - \ell_2 + 2\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \left|-2\ell_2 + 2\right| = \left|f'(\ell_2)\right| \; \textit{car } f'(x) = -2x + 2 \end{aligned}$$

$>$ Méthode taux. On a

$$\left|\frac{u_{n+1} - \ell_2}{u_n - \ell_2}\right| = \left|\frac{f(u_n) - f(\ell_2)}{u_n - \ell_2}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \left|f'(\ell_2)\right| \; \textit{car } u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell_2$$

(c) En déduire qu'il existe $k > 1$ et N_0 tel que $\forall n \geqslant N_0,\; |u_{n+1} - \ell_2| \geqslant k\,|u_n - \ell_2|$

On vérifie que $\left|f'(\ell_2)\right| > 1$.

On applique la def de $\left|\dfrac{u_{n+1} - \ell_2}{u_n - \ell_2}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \left|f'(\ell_2)\right|$ avec $\varepsilon = \dfrac{|f'(\ell_2)| - 1}{2}$

ainsi ....

(d) En déduire que la suite $\Big(|u_n - \ell_2|\Big)_{n\in,\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

À la mode géo, on obtient

$$\begin{aligned} |u_n - \ell_2| &\geqslant k\,|u_{n-1} - \ell_2| \\ &\vdots \\ &\geqslant k....k\,|u_{N_0} - \ell_2| = k^{n-N_0}\,|u_{N_0} - \ell_2| = Constante \times k^n \end{aligned}$$

Donc la suite $(|u_n - \ell_2|)$ diverge vers $+\infty$ (thm de comparaison)

(e) Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est chaotique.

C'est absurde car par hypothèse $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell_2$ donc la suite $(|u_n - \ell_2|)$ converge aussi vers 0.

Ainsi l'hypothèse "la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge" est absurde.

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans $\mathbb{R}$,
la suite ne diverge pas ver $\pm\infty$ car $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 1 < u_n < 2$

$\boxed{\text{Ainsi la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est chaotique.}}$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 > 1$ et $\forall\, n \geqslant 0,\quad u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + \frac{1}{n+1}}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$.

   On montre par récurrence
   $$H\langle n\rangle : |\text{le nombre } u_n \text{ existe et } u_n > 0.$$

2. Déterminer ses limites possibles de la suite (u_n).

   On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.
   $$\left.\begin{array}{r} u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + \frac{1}{n+1}} \\ u_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \\ \dfrac{1}{u_n + \frac{1}{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{\ell} \end{array}\right\} \underset{\text{qd } n\to+\infty}{\overset{}{\Longrightarrow}}{}_{\text{A la limite}}\ \ell = \frac{1}{\ell}$$

   Ainsi $\ell^2 = 1 \iff \ell = +1$ ou $\ell = -1$

   Mais $\forall\, n\, u_n > 0$, on a forcément $\ell \geqslant 0$.

   Donc la seule limite possible c'est $\ell = 1$

   Remarque : en fait le raisonnement est faux lorsque $\ell = 0$ car on ne divise pas par 0.
   Il y a à priori 2 limites possibles $\ell = 1$ et $\ell = 0$
   Avec un RA et le même à la limite, on justifie que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ est absurde

3. Montrer que $\forall\, n \geqslant 1,\ u_{2n-1} < 1$ et $u_{2n} > 1$.

   On montre par récurrence
   $$H\langle n\rangle : |\, u_{2n-1} < 1 \quad \text{et} \quad u_{2n} > 1$$

   $\to$ $H\langle 1\rangle$ est vraie car
   $$u_1 = \frac{1}{u_0 + \frac{1}{1}} < \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} < 1 \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{1}{u_1 + \frac{1}{1+1}} >_{[\text{Or } u_1 < \frac{1}{2}]} \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{1+1}} = 1.$$

   Attention : la majoration $u_1 < 1$ n'est pas suffisante obtenir la deuxième inégalité.

   $\to$ $H\langle n\rangle \Rightarrow H\langle n+1\rangle$
   $$\begin{aligned} u_{2n+1} &= \frac{1}{u_{2n} + \frac{1}{2n+1}} <_{\text{On utilise } H\langle n\rangle} \frac{1}{1 + \frac{1}{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1 \\ &\text{et} \\ u_{2n+2} &= \frac{1}{u_{2n+1} + \frac{1}{2n+2}} >_{[\text{Or } u_{2n+1} < \frac{2n+1}{2n+2}]} \frac{1}{\frac{2n+1}{2n+2} + \frac{1}{2n+2}} = 1 \end{aligned}$$

   Attention *: Les mêmes causes induisent les même effets.*
   Comme pour l'initialisation, la majoration $u_{2n+1} < 1$ n'est pas suffisante obtenir la deuxième inégalité.

4. Bli.

   (a) Étudier la monotonie de la suite extraite (u_{2n+1}). En déduire que la suite (u_{2n+1}) converge vers $0 < \ell \leqslant 1$.

   Comme $0 < u_{2n+1} \leqslant 1$, on a
   $$\begin{aligned} u_{2n+3} - u_{2n+1} &= \frac{(2n+1)\left(1 - u_{2n+1}^2\right) - u_{2n+1}^2 - u_{2n+1} + 2}{(2n+1)^2 + 3\,(2n+1) + 3 + u_{2n+1}\,(2n+1) + u_{2n+1}} \\ &\quad \text{Pour minorer } a - b, \ldots.. \\ &\geqslant \frac{(2n+1)\,(1-1) - 1 - 1 + 2}{..} = \frac{0}{\ldots} = 0 \end{aligned}$$

   Ainsi la suite (u_{2n+1}) est croissante majorée par 1 donc elle converge vers $\ell \leqslant 1$.

   (b) montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et N_0 tel que $\forall\, n \geqslant N_0,\ u_{2n+1} - u_{2n-1} \geqslant \dfrac{\alpha}{n} > 0$

   On suppose que $\ell < 1$, on a
   $$u_{2n+1} - u_{2n-1} = u_{n+2} - u_n \underset{n\to\infty}{=} \frac{(2n)\left(1-\ell^2\right)[1+o(1)]}{4n^2[1+o(1)]} = \frac{1-\ell^2}{2n}[1+o(1)] \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1-\ell^2}{2n}$$

   On applique la def de $\dfrac{u_{2n+1} - u_{2n-1}}{\frac{1-\ell^2}{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ avec $\varepsilon = \dfrac{1}{2} > 0$

Ainsi il existe N_0 tel que $Si\ n \geqslant N_0$

$$\forall\, n \geqslant N_0, \quad \frac{u_{2n+1} - u_{2n-1}}{PP} \quad \geqslant \quad \ell - \varepsilon = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad u_{2n+1} - u_{2n-1} \geqslant \frac{\alpha}{n} \quad \text{avec } \alpha = \frac{1}{2}\frac{1-\ell^2}{2} > 0$$

(c) En déduire une minoration de u_{2n+1} en fonction de H_n.
On fait à la mode Géo ou bien On somme l'inégalité de $k = N_0$ à $k = n$, ainsi

$$u_{2n+1} - u_{2n-1} \geqslant \frac{\alpha}{n}$$
$$u_{2n-1} - u_{2n-3} \geqslant \frac{\alpha}{(n-1)}$$

$$u_{2N_0+1} - u_{2N_0-1} \geqslant \frac{\alpha}{N_0}$$

On somme les inégalités, ainsi $u_{2n+1} - u_{2N_0-1} \geqslant \alpha\left(\frac{1}{N_0} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \alpha\,(H_n - H_{N_0-1})$

$$\text{DONC } \forall\, n \geqslant N_0,\ u_{2n+1} \geqslant \alpha S_n + \text{Constante}$$

(d) En déduire une contradiction. Que peut-on conclure ?
Comme $H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ Absurde.

Conclusion : l'hypothèse $\ell \underset{\text{Strict}}{<} 1$ est absurde donc $\ell = 1$

La suite extraite (u_{2n+1}) converge vers 1.

5. Montrer (sans calcul ou presque) que $u_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

On a $u_{2n} = \dfrac{1}{u_{2n-1} + \frac{1}{2n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1+0} = 1$
Comme les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) contiennent tous les termes de la suite, et convergent vers la même limite 1

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.