Les suites.

1 Généralités. 1
2 Définition de la convergence d'une suite. 2
2.1 Converge dans $\mathbb{R}$. 2
2.2 Diverge. 3
3 Les premières applications 4
3.1 Le nombre u_n se rapproche 4
3.2 À la limite quand $n \to \infty$. 4
4 Théorèmes de convergence 5
4.1 Opérations sur les limites. 5
4.2 Gendarmes et comparaison. 5
4.3 Suite monotone. 6
5 Situations classiques. 7
5.1 Suites adjacentes. 7
5.2 Distance entre u_n et ℓ 7
5.3 Les suites $u_{n+1} = f(u_n)$. 7
6 Exercices 8

Rappel : On a déjà fait

> À la mode géométrique.
> Suite Arithmético-géométrique.
> Suites d'ordre 2.

1 Généralités.

Définition 1.

Une suite numérique (réelle ou complexe), notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
est une liste d'éléments de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ indexées sur $\mathbb{N}$, CàD

Attention Il ne faut pas confondre : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et le nombre u_n.

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\underbrace{u_0}_{n=0}, \underbrace{u_1}_{n=1}, u_2, \ldots, \underbrace{u_{641}}_{n=641}, \ldots, \underbrace{u_{1492}}_{n=1492}, \ldots, \underbrace{u_{10^{23}}}_{n=10^{23}}, \ldots \right)$$

Exemples

> La suite constante égale à a, CàD $(a)_{n\in\mathbb{N}} = (a, a, \ldots, a, ..)$, CàD $\forall\, n,\ u_n = a$
> la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, a, a^2, a^3 \ldots, a^n, ..)$ est une suite géométrique de raison a, on a $\forall\, n,\ u_n = a^n$
> la suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} = (+1, -1, +1, -1, \ldots, ..)$, , on a $\forall\, n,\ u_n = (-1)^n$

Définition 2. À partir d'un certain rang

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

Ssi $\forall\, n \in \mathbb{N}, ,\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang

Ssi il existe N_0 tel que :
$\forall\, n \geqslant N_0,\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$

De même, on peut fabriquer : positive, majorée, bornée à partir d'un certain rang,........

Un exemple très important.

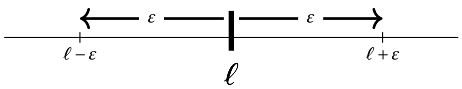
On sait que le nombre 2^n devient infiniment plus petit que le nombre $n!$ $_{\text{quand } n\to\infty}$
Ainsi on peut anticiper que

le nombre 2^n devient *effectivement* plus petit que le nombre n!
CàD il existe N_1 tel que : $\forall\, n \geqslant N_1,\ 2^n \leqslant n!$

2 Définition de la convergence d'une suite.

2.1 Converge dans $\mathbb{R}$.

Ici il faut rappeler que



$$|x-\ell| \leqslant \varepsilon \iff x \in [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$$
$$\iff \ell-\varepsilon \leqslant x \leqslant \ell+\varepsilon$$

Définition 3. Définition de converge vers ℓ

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ Ssi on a

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \textit{il existe un rang } N_0 \textit{ tel que}$$
$$\textit{Si } n \geqslant N_0 \textit{ alors } \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon \quad \textit{ou } |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On écrit alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$.

Attention : Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ Alors la limite ℓ ne dépend pas de n.

Pour comprendre la définition, on va l'appliquer

> J'applique la définition de $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ avec $\varepsilon = 1 > 0$.

Ainsi on a

> J'applique la définition de $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ avec $\varepsilon = {}^1/_{10} > 0$.

Ainsi on a

À retenir : Quand on applique la définition $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ avec $\varepsilon = \square > 0$,

Alors on obtient une inégalité $u_n \leqslant \ell + \square$,

valide à partir d'un certain rang

2.2 Diverge.

Définition 4. Divergence vers $\pm\infty$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

Vers $+\infty$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ Ssi on a

$$\forall\, M > 0, \quad \textit{il existe un rang } N_0 \textit{ tel que} \\ \textit{Si } n \geqslant N_0 \textit{ alors } M \leqslant u_n$$

On écrit alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Vers $-\infty$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ Ssi on a

$$\forall\, m < 0, \quad \textit{il existe un rang } N_0 \textit{ tel que} \\ \textit{Si } n \geqslant N_0 \textit{ alors } u_n \leqslant m$$

On écrit alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Divergence stricte, CàD le chaos.

Lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans $\mathbb{R}$ et ne diverge pas vers $\pm\infty$,

on dit alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge strictement

Par exemple, les suites $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *divergent strictement.*

À retenir : Quand on applique la définition $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ avec $M = \square$,

Alors on obtient une inégalité $\square \leqslant u_n$,

valide à partir d'un certain rang

3 Les premières applications

3.1 Le nombre u_n se rapproche

Théorème 5. Le nombre u_n se rapproche de ℓ.

Lorsque la suite (u_n) converge vers ℓ,
alors le nombre u_n se rapproche ℓ

Unicité de la limite.

On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge d'une part vers ℓ et d'autre part vers ℓ', alors $\ell = \ell'$

Converge $\Longrightarrow$ Majorée/minoré.

On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Alors le nombre u_n devient $\leqslant \ell+1$ à partir d'un certain rang.

Converge vers $\ell > 0$.

On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$.

Alors le nombre u_n devient > 0 à partir d'un certain rang.

Converge $\Longrightarrow$ bornée.

On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Alors le nombre $|u_n|$ devient $\leqslant |\ell|+1$ à partir d'un certain rang.

Théorème 6. Application au "petit o" et "équivalent"

> $u_n \underset{n\to\infty}{=} o\left({}^1/{}_{n^2}\right)$ **Alors ....**

CàD le nombre u_n devient infiniment plus petit que le nombre ${}^1/{}_{n^2}$

Alors il existe N_0 tel que $\forall\, n \geqslant N_0,\ u_n \leqslant {}^1/{}_{n^2}$

> $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} o\left({}^1/{}_{n^2}\right)$ **Alors ....**

CàD le nombre u_n sera du même ordre de grandeur que le nombre ${}^1/{}_{n^2}$

Alors il existe N_0 tel que $\forall\, n \geqslant N_0,\ \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n^2} \leqslant u_n \leqslant 2\dfrac{1}{n^2}$

3.2 À la limite quand $n \to \infty$.

Théorème 7. À la limite quand $n \to \infty$

Soit (G_n) et (D_n) deux suites.

On a

$$\left.\begin{array}{r}\forall\, n,\quad G_n \leqslant D_n\\ G_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell\\ D_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell'\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l}\text{À la limite quand } n\to\infty,\\ \qquad \text{l'inégalité devient}\quad \ell \underset{Large}{\leqslant} \ell'\end{array}$$

Avec $G_n = D_n$ et on conclut $\ell = \ell'$

4 Théorèmes de convergence

4.1 Opérations sur les limites.

Théorème 8. Formulaire classique.

On suppose que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ et $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell'$.

On a alors

$$|a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} |\ell|$$

$$\lambda a_n + \mu b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda\ell + \mu\ell' \quad \textit{ici } \lambda \textit{ et } \mu \textit{ deux scalaires (réels ou complexes).}$$

$$a_n.b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell.\ell'$$

$$a_n/b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell/\ell' \quad \textit{ici } \forall\, n,\ b_n \neq 0 \textit{ et } \ell' \neq 0$$

$$f(a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(\ell) \quad \textit{ici La fonction } f \textit{ est continue en } \ell, \textit{CàD } f(x) \xrightarrow[x\to\ell]{} f(\ell)$$

$$(a_n)^{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell^{\ell'}$$

Avec les équivalents.

$$\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to\infty}{\sim} A_n \\ \\ A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \end{array}\right\} \Longrightarrow \textit{La suite } (u_n) \textit{ converge vers } \ell$$

Démonstration : On fera les démonstrations en classe, cependant

$$u_n^{v_n} = a^{bouge} = e^{b\ln(a)} = \exp(v_n \ln u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp\left(\ell'.\ln(\ell)\right) = \ell^{\ell'}$$

4.2 Gendarmes et comparaison.

Théorème 9. Gendarmes et comparaison.

Le théorème des 2 gendarmes.

$$\left.\begin{array}{r} \forall\, n,\ m_n \leqslant u_n \leqslant M_n \\ \\ m_n, M_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell$$

Le théorème de comparaison.

$$\left.\begin{array}{r} \forall\, n, \quad m_n \leqslant u_n \\ \\ m_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge } +\infty$$

4.3 Suite monotone.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite alors il y a 3 situations envisageables

Soit la suite converge dans $\mathbb{R}$ Soit la suite diverge vers $\pm\infty$ Soit la suite est chaotique

On suppose que la suites est croissante alors il y a 2 possibilités

$\boxed{\text{Soit la suite converge dans } \mathbb{R}}$ $\boxed{\text{Soit la suite diverge vers } \pm\infty}$

Théorème 10. Théorème de la limite monotone.

Théorème de la limite monotone.

$$\left.\begin{array}{c}\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante} \\ \\ \text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est majorée par } M\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c}\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \\ \text{vers } \ell \leqslant M\end{array}$$

De plus, on a : $u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \ldots \leqslant u_n \leqslant .. \leqslant \ell \leqslant M$

Suite croissante et ne converge pas.

$$\left.\begin{array}{c}\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante} \\ \\ \text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ne converge pas dans } \mathbb{R}\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c}\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge} \\ \text{vers } +\infty\end{array}$$

De plus pour montrer la suite ne converge pas dans $\mathbb{R}$, on fait un R.A.

5 Situations classiques.

5.1 Suites adjacentes.

Définition 11.
On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

On dit que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes

Ssi on a les trois propriétés

(i) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(ii) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(iii) $u_n - v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Le théorème des suites adjacentes.

Lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes,

Alors les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ

Et en plus la limite commune ℓ sépare les deux suites

CàD $\quad u_0 \leqslant u_1 \leqslant .... \leqslant u_n \leqslant ... \leqslant \ell \leqslant ... \leqslant v_n \leqslant ... \leqslant v_1 \leqslant v_0$

5.2 Distance entre u_n et ℓ

Théorème 12. Le théorème du module/de la distance.

$$\left.\begin{array}{r}\forall\, n, \quad |u_n - \ell| \leqslant M_n \\[2ex] M_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{ la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell$$

Exemple. On suppose que $|u_{n+1} - \ell| \leqslant c\,|u_n - \ell|$. On en déduit à la mode géo

$$\begin{aligned} |u_n - \ell| &\leqslant c\,|u_{n-1} - \ell| \\ &\leqslant c\,c\,|u_{n-2} - \ell| \\ &\ \vdots \\ &\leqslant c\,c\ldots c\,|u_0 - \ell| = c^n\,|u_0 - \ell| \end{aligned}$$

5.3 Les suites $u_{n+1} = f(u_n)$.

Plan d'étude.

> On étudie les fonctions $f : x \longmapsto f(x)$ et $h : x \longmapsto f(x) - x$
> On justifie que par récurrence que la suite (u_n) est bien définie.
> On détermine les limites possibles de la suite avec l'équation $f(\ell) = \ell$.
> On étudie la monotonie par récurrence.
> On justifie avec le TAF que $|u_{n+1} - \ell| \leqslant c\,|u_n - \ell|$ puis on a
$$\begin{aligned} |u_n - \ell| &\leqslant c\,|u_{n-1} - \ell| \\ &\leqslant c\,c\,|u_{n-2} - \ell| \\ &\ \vdots \\ &\leqslant c\,c\ldots c\,|u_0 - \ell| = c^n\,|u_0 - \ell| \end{aligned}$$

6 Exercices

Déjà vue

Exercice 1. *À la mode géo* Pour les suites récurrentes suivantes calculer, u_n en fonction de n.

1. Classique : $u_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} u_n$, $\quad u_{n+1} = (u_n)^2$
2. Plus difficile : $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$

Exercice 2. [Correction] *Déjà fait en terminale mais à refaire* On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et (v_n) définies par

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{3-2u_n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$$

1. Calculer v_{n+1} en fonction de v_n
   En déduire v_n en fonction de n.
2. Calculer u_n en fonction de n.
   A votre avis la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

Exercice 3. [Correction] *Déjà fait en terminale mais à refaire* On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et (v_n) définies par

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad et \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{-4\,u_n - 4}{u_n} \quad et\ v_n = \frac{1}{u_n + 2}$$

1. Calculer v_{n+1} en fonction de v_n
   En déduire v_n en fonction de n.
2. Calculer u_n en fonction de n.
   A votre avis la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

Exercice 4. *Déjà fait mais à refaire* Pour les suites récurrentes suivantes calculer, u_n en fonction de n.

> $u_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3\,u_n + 5$
> $u_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3\,u_n + n$ *Bonus Difficile*
> $F_0 = 0,\ F_1 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
> $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$.
> $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -4u_{n+1} - 4u_n$.

Exercice 5. *Déjà fait mais à refaire*

1. Montrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n, b_n \in \mathbb{N}$ tel que $\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$
   Et expliciter a_{n+1}, b_{n+1} en fonction de a_n, b_n.
2. Montrer que : la suite (a_n) vérifie une récurrence d'ordre 2.
3. Calculer a_n en fonction de n.

Exercice 6. *La question Q1 est intéressante mais pas "facile"*

1. Montrer la suite $u_n = \left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n$ est une suite récurrente d'ordre 2.
   En déduire que u_n est un entier pair.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = \sin\left(\pi\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right)$
   est une suite convergente.
3. Bonus Montrer *avec le binôme* que : $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier pair.

Modèle : La suite Harmonique.

Exercice 7. [Correction] On considère la suite (H_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

$$\boxed{\text{On va montrer que : } H_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty}$$

1. Étudier la monotonie de la suite. Que peut-on conclure ?
2. Montrer $\forall\, n \geqslant 1,\ H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$.
3. On suppose que la suite (S_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.
   Que devient la relation quand $n \to \infty$?
4. Conclure.

Exercice 8. On considère la suite (H_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

$$\boxed{\text{On va montrer que : } H_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty}$$

1. Montrer que : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k} \geqslant \ln(k+1) - \ln(k)$
2. En déduire que : $H_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

Exercice 9. On considère la suite (H_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

$$\boxed{\text{On va montrer que : } H_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty}$$

1. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant 1 + x$
2. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ e^{H_n} \geqslant n + 1$
3. En déduire que : $H_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

Les FI classiques

Exercice 10. On considère la suite (Q_n) définie par $Q_n = n^3/2^n$.

1. Montrer qu'il existe un rang N_0 tel que : $\forall\, n \geqslant N_0,\ u_{n+1} \leqslant \frac{3}{4} u_n$
2. En déduire une majoration de u_n puis que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Conclusion : $\frac{n^2}{3^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, CàD $n^2 \underset{n\to\infty}{=} o(3^n)$.

Exercice 11. On considère la suite (Q_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ Q_n = \frac{n^2}{3^n}$

1. Déterminer un équivalent de $Q_{n+1} - Q_n$. En déduire la monotonie de la suite (Q_n).
   Justifier que la suite (Q_n) est converge vers $\ell \geqslant 0$
2. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ Q_{n+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 Q_n$. En déduire que $\ell = 0$.

Conclusion : $\frac{n^2}{3^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, CàD $n^2 \underset{n\to\infty}{=} o(3^n)$.

Exercice 12. *Plus difficile* Pour tout $\alpha > 0$. On considère la suite $\big(Q_n(\alpha)\big)$ définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ Q_n(\alpha) = \frac{\ln(n)}{n^\alpha}$

1. Déterminer un équivalent de $Q_{n+1}(\alpha) - Q_n(\alpha)$.
   En déduire que la suite $\big(Q_n(\alpha)\big)$ décroissante à partir d'un certain rang
   puis que la suite $\big(Q_n(\alpha)\big)$ est converge vers $\ell_{(\alpha)} \geqslant 0$
2. Exprimer $Q_n(\alpha)$ en fonction de $Q_n(\alpha/2)$. En déduire que $\ell = 0$.

Conclusion : $\frac{\ln(n)}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, CàD $\ln(n) \underset{n\to\infty}{=} o(n^2)$.

Classique

Exercice 13. [Correction] Soit (I_n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_1^e (\ln t)^n\, dt$$

1. Étudier la monotonie de la suite (I_n). En déduire que la suite (I_n) converge.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
3. En déduire par un RA que la suite (I_n) converge vers 0 puis déterminer un équivalent de I_n

Exercice 14. [Correction] Soit (S_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.

1. Étudier la monotonie de la suite. Que peut-on conclure ?
2. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N} - \{0,1\},\ \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\, dt$
3. En déduire une majoration de la suite (S_n) puis que la suite (S_n) est majorée. Conclure.

Exercice 15. [Correction] On considère la suite (S_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

1. Convergence *Déjà vue*
   (a) Montrer que la suite (S_n) est croissante.
   (b) Montrer que la suite est majorée par 1.
   (c) Conclure.
2. On va montrer que $\ell = \ln 2$
   (a) Montrer que : $\forall k \geqslant 2,\ \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t} dt$
   (b) En déduire un encadrement de S_n.
   (c) Montrer que $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln 2$

Exercice 16.

1. On considère la suite (S_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k}$.
   Montrer que la suite (S_n) converge et déterminer sa limite
2. On considère la suite (T_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k}$.
   > Montrer que la suite (T_n) converge. On note ℓ sa limite.
   > Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T_{n+1} = \frac{T_n + S_n}{3}$. En déduire la valeur de ℓ.

Moins classiques

Exercice 17. [Correction] *Déjà fait en DM* Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{1,..,n\}$. On considère $u_k = \frac{1}{n^k}\binom{n}{k}$

1. Simplifier $^{u_{k+1}}/_{u_k}$ puis montrer que : $\forall\, k \in \{1,..,n-1\},\ \frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant \frac{1}{2}$.
2. En déduire une majoration de u_n.
3. En déduire avec le binôme et la question Q2, que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant 3$

Exercice 18. *Pas une première lecture mais ...* On considère la suite (S_n) définie par $\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} k! = 0!+1!+2!+\cdots+n!$

1. Montrer que : $\sum_{k=0}^{n-2} k! \underset{n\to\infty}{=} o(n!)$
2. En déduire que : $S_n \underset{n\to\infty}{\sim} n!$
3. Suivante la même démarche, montrer $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$

À partir d'un certain rang

Exercice 19. [Correction] Étudier la monotonie, ou la monotonie à partir d'un certain rang, des suites suivantes

$$\frac{n^3}{2^n} \qquad \frac{11^n}{n!} \qquad \binom{2n}{n} \qquad \sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k} \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$$

Exercice 20. [Correction] On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{3^k+1}{3^k}\right)$.

1. Montrer qu'il existe un entier N_0 tel que : $\forall\, k \geqslant N_0,\ \ln\left(\frac{3^k+1}{3^k}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{3^k}\right) \leqslant \frac{2}{3^k}$
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 21. [Correction] On va étudier la suite (U_n) définie par $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{1}{k^2}\right)$

1. Montrer qu'il existe un entier N_0 tel : $\forall\, k \geqslant N_0,\ \sin\left(\frac{1}{k^2}\right) \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.
2. En déduire une majoration de U_n.
3. La suite (U_n) converge-t-elle ?

Suites Récurrentes

Exercice 22. [Correction] Soit (x_n) et (y_n) deux suites réelles tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{2} \quad et \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

On considère la suite complexe de terme général $z_n = x_n + i\, y_n$.

1. Calculer z_{n+1} en fonction z_n.
2. Les suites (z_n), (x_n), (y_n) convergent-elle ?

Exercice 23. [Correction] Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 > 0 \text{ et } u_1 > 0 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{1}{2^n} u_n.$$

1. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ 1 + x \leqslant e^x$.
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. Majorée ? *(Plus difficile.)*
   (a) Trouver (en utilisant les question 1. et 2.), une majoration du type $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant K_n\, u_n$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est majorée puis qu'elle converge.

Exercice 24. [Correction] On rappelle que : $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $0 < u_1 \leqslant u_2$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + \dfrac{1}{n} u_n$.

1. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On va démontrer à l'aide d'un RA que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans $\mathbb{R}$.
   On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
   (a) Justifier que : $\ell > 0$
   (b) Montrer qu'il existe $N_0 > 0$ tel que $\forall\, n \geqslant N_0,\ u_n - u_{n-1} \geqslant \dfrac{\ell}{2n}$
   (c) En déduire une relation entre u_n et H_n, puis une contradiction.
3. Conclure.

Exercice 25. [Correction] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par $u_0 > 0$, $v_0 > 0$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + \frac{2}{v_n} \\ v_{n+1} = 2 v_n + \frac{1}{2u_n} \end{cases}.$$

On montrer "facilement" par récurrence que (u_n) et (v_n) sont bien définies et que $\forall\, n,\ u_n > 0$ et $v_n > 0$.

1. Convergence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Montrer que $\forall\, n,\ v_n \geqslant 2^n v_0$.
   (b) Que peut-on conclure ?
2. Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Donner une majoration de $u_{n+1} - \dfrac{1}{2} u_n$.
   (b) En déduire une majoration u_n. *(Difficile)*
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

$u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 26. [Correction] *Le modèle* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \arctan(u_n) = f(u_n)$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et $\forall\, u_n \in [0,1]$.
2. Étudier les fonctions $f : x \longmapsto f(x)$ et $h : x \longmapsto f(x) - x$
3. Trouver les limites possibles de la suite.
4. Étudier la monotonie de la suite.
5. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Exercice 27. [Correction] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 = f(u_n)$$

1. Étudier les fonctions f et $h : x \longmapsto f(x) - x$
2. Déterminer les limites possibles de la suite (u_n).
3. On suppose que $u_0 \in [0,1]$
   (a) Montrer que : $u_1 \in \left[0, {}^1/_4\right]$ puis que $\forall\, n \geqslant 1,\ u_n \in \left[0, {}^1/_4\right]$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Conclure.
4. On suppose que $u_0 \notin [0,1]$
   (a) Montrer que : $u_1 < 0$ puis que $\forall\, n \geqslant 1,\ u_n \leqslant u_1 < 0$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Conclure.

Exercice 28. Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 9 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} = f(u_n)$$

1. Étudier les fonctions f et $h : x \longmapsto f(x) - x$
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre u_n existe et $u_n \geqslant 1$
3. Trouver les limites possibles de la suite (u_n).
4. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La suite converge-t-elle ?
5. Déterminer k tel que $\forall\, n,\ |u_{n+1} - \ell| \leqslant k\,|u_n - \ell|$.
   En déduire que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$

Exercice 29. [Correction] Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 \in [0,2] \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n} = f(u_n)$$

1. Étudier les fonctions f et $h : x \longmapsto f(x) - x$
2. Montrer que $\forall\, n \geqslant 1$, le nombre u_n existe et $u_n \in \left[0, \sqrt{2}\right]$
3. Trouver les limites possibles de la suite (u_n).
4. Déterminer une relation entre $|u_{n+1} - 1|$ et $|u_n - 1|$.
   En déduire que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Suites adjacentes

Exercice 30. Soit (S_n) la suite définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Montrer que les suites(S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes

Peut-on en déduire que la suite (S_n) converge ?

Exercice 31. Soit les suites

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n\,.\,n!}$$

1. Montrer que les suites (S_n) et (T_n) sont adjacentes.
   On note e la limite commune.
2. On suppose que $e = {}^{a}/_{b} \in \mathbb{Q}$
   En examinant $b!\,S_b \leqslant b!\,e \leqslant b!\,T_b$, en déduire OUPS.

Conclusion : $e \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 32. [Correction] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par :

$$0 < u_0 < v_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n\, v_n} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n existent.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.
3. Étudier la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ

Original

Exercice 33. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle croissante qui converge vers ℓ

Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = \dfrac{1}{n}(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)$

1. Montrer que : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n+1}(u_{n+1} - v_n)$. En déduire que la suite (v_n) est croissante.
2. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \ell \leqslant v_{2n} \leqslant \dfrac{v_n + \ell}{2}$
3. En déduire que $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé) 1. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-1} \\ &= \frac{\left(\frac{u_n}{3-2u_n}\right)}{\left(\frac{u_n}{3-2u_n}\right)-1} \\ &= \frac{\frac{u_n}{3-2u_n}}{\frac{u_n-(3-2u_n)}{3-2u_n}} = \frac{u_n}{3-2u_n} \times \frac{3-2u_n}{u_n-3} = \frac{u_n}{3u_n-3} = \frac{1}{3}v_n \end{aligned}$$

Ainsi la suite (v_n) est une suite géométrique.

On a maintenant

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{3}v_{n-1} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}v_{n-2}\right) = \frac{1}{3}\dots\frac{1}{3}\ v_0 = \left(\frac{1}{3}\right)^n\ v_0. \end{aligned}$$

2. On sait $\dfrac{u_n}{u_n-1} = v_n$

$\implies u_n = v_n(u_n-1) \Rightarrow u_n(1-v_n) = v_n$

$$\text{Donc}\quad u_n = \frac{v_n}{v_n-1} = \frac{\left({}^1/_3\right)^n\ v_0}{\left({}^1/_3\right)^n\ v_0-1}$$

Comme $\left({}^1/_3\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a

$$u_n = \frac{v_n}{v_n-1} = \frac{\left({}^1/_3\right)^n\ v_0}{\left({}^1/_3\right)^n\ v_0-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{0}{0-1} = 0$$

Conclusion : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Solution de l'exercice 3 (Énoncé) 1. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1}+2} \\ &= \frac{u_n}{-2u_n-4} \\ &= \frac{-1}{2}\frac{u_n}{u_n+2} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{u_n+2} = \frac{-1}{2} + v_n \end{aligned}$$

Ainsi la suite (v_n) est une suite arithmétique.

On a maintenant

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{-1}{2} + v_{n-1} \\ &\quad \textit{À la mod géo} \\ &= \frac{-1}{2} + \left(\frac{-1}{2} + v_{n-2}\right) \\ &= \frac{-1}{2} + \dots + \frac{-1}{2} + v_0 = \frac{-n}{2} + v_0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty \end{aligned}$$

2. On sait $v_n = \dfrac{1}{u_n+2} = v_n$

$\implies \dots. \implies u_n = -2 + \dfrac{1}{v_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -2 + \dfrac{1}{-\infty} = -2$

Conclusion : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -2.

Solution de l'exercice 7 (Énoncé)

1. pour tout n, on a $H_{n+1} - H_n = \dfrac{1}{n+1} > 0$ la suite est donc croissante

Conclusion : Soit la suite cv dans $\mathbb{R}$ Soit la suite diverge vers $+\infty$

2. Pour tout n, on a

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

3. On suppose que la suite (H_n) converge vers ℓ

$$\left.\begin{array}{r} \forall\, n\in\mathbb{N}, H_{2n}-H_n \geqslant \dfrac{1}{2} \\ H_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l}\text{À la limite, quand } n\to\infty, \\ \quad \text{la relation devient } \ell-\ell \geqslant \dfrac{1}{2} \text{ OUPS}\end{array}$$

Conclusion : l'hypothèse la suite (S_n) converge vers $\ell\in\mathbb{R}$ est absurde, CàD la suite ne converge pas dans $\mathbb{R}$.

4. On a montré que la suite (H_n) est croissante et ne converge pas dans $\mathbb{R}$

Conclusion : La suite (H_n) diverge vers $+\infty$

Solution de l'exercice 13 (Énoncé)

1. On a

$$I_{n+1}-I_n = \int_1^e \underbrace{(\ln t)^n}_{\geqslant 0\ sur[1,e]} \left[\underbrace{\ln t - 1}_{\leqslant 0\ sur[1,e]}\right] dt \leqslant 0$$

La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers $\ell \geqslant 0$.

2. On fait une IPP

3. On suppose que $\ell > 0$. On a

$$\left.\begin{array}{r} \forall\, n\in\mathbb{N},\ I_{n+1} = e-(n+1)I_n \\ I_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \\ e-(n+1)I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} e-\infty\ell \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c}\text{On regarde ce que devient la relation quand } n\to\infty \\ \text{Ainsi à la limite, on a} \quad \ell = e-(\infty)\ell\end{array}$$

Comme $\ell>0$, on a $(\infty)\ell=\infty$. On a donc $\ell=-\infty$ OUPS ! ! ! !

Conclusion : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell\geqslant 0$ et $\ell>0$ est absurde
Donc La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Solution de l'exercice 14 (Énoncé)

1. pour tout n, on a $S_{n+1}-S_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$ la suite est donc croissante

Conclusion : Soit la suite cv dans $\mathbb{R}$ Soit la suite diverge vers $+\infty$

2. Pour tout $k\in\{\cancel{1},2,\dots,n\}$.

> $\forall\, t\in[k-1,k],\ \dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$

> On intègre l'inégalité sur $[k-1,k]$,

Ainsi $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \dfrac{1}{t^2}\,dt$

3. On somme l'inégalité précédent de $k=2$ à $k=n$, CàD **là où elle est valide**

$$\text{ainsi } H_n = \sum_{k=1}^{n} {}^1/_{k^2} = \underbrace{1}_{k=1} + \sum_{k=2}^{n} {}^1/_{k^2} \leqslant 1+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k} {}^1/_t\ dt$$
$$\leqslant 1+\int_1^2+\int_2^3+\cdots+\int_{n-1}^{n}$$
$$\leqslant 1+\int_1^n {}^1/_{t^2}\ dt$$
$$\leqslant 1+\left[{}^{-1}/_t\right]_1^n$$
$$\leqslant 1+1-{}^1/_n$$
$$\leqslant \underbrace{1+1-{}^1/_n}_{\text{Attention ça dépend de } n} \leqslant 2-0$$

4. La suite (S_n) est croissante et majorée par 2 donc elle converge vers $\ell\leqslant 2$

Solution de l'exercice 15 (Énoncé)

1. Convergence

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \\
&= \left[\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+2}\right] - \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right] \\
&= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \geqslant 0
\end{aligned}$$

La suite (S_n) est donc croissante

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} n = \frac{n}{n+1} \leqslant \frac{n}{n+0} = 1$$

La suite (S_n) est donc majorée par 1.

(c) La suite est croissante, majorée par 1 ainsi elle converge vers $\ell \leqslant 1$

2. On va montrer que $\ell = \ln 2$

(a) On va majorer les intégrales, CàD les plateaux

$$\text{Pour tout } k \geqslant 1, \text{ on a } \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{\underbrace{k}_{}}\,dt = \frac{1}{k}$$

$$\text{Pour tout } k \geqslant 2, \text{ on a } \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,dt \geqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{\underbrace{k}_{}}\,dt = \frac{1}{k}$$

(b) On applique l'encadrement précédent avec $n+k$, puis o n somme les inégalités là où elles sont valides,

$$\text{ainsi Pour tout } k \geqslant 1, \quad \sum_{k=1}^{n} \int_{n+k}^{n+k+1} \frac{1}{t}\,dt \leqslant S_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{n+k-1}^{n+k} \frac{1}{t}\,dt$$

De plus

$$> G_n = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt = \int_{n+1}^{n+2} + \cdots + \int_{2n}^{2n+1} = \int_{n+1}^{2n+1} \frac{1}{t}\,dt = \ln(2n+1) - \ln(n+1) = \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)$$

$$> D_n = \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,dt = \int_{n}^{n+1} + \cdots + \int_{2n-1}^{2n} = \int_{n}^{2n} \frac{1}{t}\,dt = \ln(2n) - \ln(n) = \ln\frac{2n}{n} \ln(2)$$

(c) On a

$$\lim_{n\to\infty} G_n = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{2n+o(n)}{n+o(n)}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{2n}{n}\right) = \ln 2$$

Ainsi on a

$$\left.\begin{array}{l} \forall\, n,\ G_n \leqslant S_n \leqslant D_n \\ \\ \lim\limits_{n\to\infty} G_n = \ln 2 \\ \lim\limits_{n\to\infty} D_n = \ln 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{D'après le thm des 2 gendarmes, la suite } (S_n) \text{ converge vers } \ln 2$$

Solution de l'exercice 17 (Énoncé)

1. Soit $k \in \{1, .., (n-1)\}$.

On a

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\frac{1}{n^{k+1}}\binom{n}{k+1}}{\frac{1}{n^k}\binom{n}{k}} = \frac{n^k}{n^{k+1}} \frac{\dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}}{\dfrac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{1}{n}\frac{n-k}{k+1}$$

Directement on a

$$\frac{1}{2} - \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\frac{n-k}{k+1} = \frac{n(k+1) - 2(n-k)}{n(k+1)} = \frac{n(k-1)+2k}{n(k+1)} \geqslant 0 \quad \textit{car } k \geqslant 1$$

2. On a pour $n \in \{1, 2, ..., n\}$, $u_{k+1} \leqslant \dfrac{1}{2} u_k$

À la mode géo, on déduit que $u_k \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1} u_1 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$

3. Ainsi : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &\leqslant \underbrace{1}_{k=0} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &\leqslant 1+2\left(\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-{}^{1}/_{2}}-1\right) \\ &= 3-4\frac{1}{2^{n+1}} \leqslant 3\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 19 (Énoncé)

> On a

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ a_{n+1}-a_n = \frac{11^{n+1}}{(n+1)!}-\frac{11^n}{n!} = \frac{11^n}{n!}\left[\frac{11}{n+1}-1\right] = \frac{11^n}{n!}\left[\frac{11-n}{n+1}\right]$$

Donc $a_{n+1}-a_n<0$ à partir du rang $N_0 = 11$

> On a

$$\begin{aligned}\forall\, n\in\mathbb{N},\ b_{n+1}-b_n = \binom{2n+2}{n+1}-\binom{2n}{n} &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!}-\frac{(2n)!}{n!\,n!} \\ &= \frac{(2n)!}{n!\,n!}\left[\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)}-1\right] \\ &= \frac{(2n)!}{n!\,n!}\left[\frac{2(2n+1)}{(n+1)}-1\right] \\ &= \frac{(2n)!}{n!\,n!}\left[\frac{4n+2-(n+1)}{(n+1)}\right] \\ &= \frac{(2n)!}{n!\,n!}\,\frac{3n+1}{(n+1)} \geqslant 0\end{aligned}$$

Donc pour tout n, $b_{n+1}-b_n \geqslant 0$.

Solution de l'exercice 20 (Énoncé)

1. On considère

$$Q_k = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{3^k}\right)}{{}^{2}/_{3^k}} = 3^k\ln\left(\frac{3^k+1}{3^k}\right) = \frac{1}{2}3^k\ln\left(1+\frac{1}{3^k}\right) = \frac{1}{2}3^k\ln(1+\square) = \frac{1}{3^k}(\square+o(\square)) = \frac{1}{2}[1+o(1)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

J'applique la définition de $Q_k \to \frac{1}{2}$" avec $\varepsilon = {}^{1}/_{2} > 0$

$$\begin{aligned}\text{Ainsi il existe un rang } N_0 \text{ tel que } \forall\, k\geqslant N_0,\ Q_k &\leqslant \ell+\varepsilon = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1 \\ &\implies \ln\left(\tfrac{3^k+1}{3^k}\right) \leqslant \frac{2}{3^k}\end{aligned}$$

2. On somme l'inégalité précédent de $k = N_0$ à $k = n$, CàD **là où elle est valide**

$$\text{ainsi } u_n = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{3^k+1}{3^k}\right) = \underbrace{\sum_{k=1}^{N_0-1}\cdots}_{Konstante} + \sum_{k=N_0}^{n}\ln\left(\frac{3^k+1}{3^k}\right) \leqslant K + \sum_{k=N_0}^{n}\left[\frac{2}{3^k}\right]$$

C'est une Somme Géo

$$\begin{aligned}\text{Et on a } \square^{N_0}+\cdots+\square^n &= 1+\square+\cdots+\square^n-\left(1+\cdots+\square^{N_0-1}\right) \\ &= \frac{1-\square^{n+1}}{1+\square}-K'onstante\end{aligned}$$

$$\leqslant K+2\left(\underbrace{\frac{1-\square^{n+1}}{1+\square}}_{\text{Attention ça dépend de } n}-K'\right) \quad \text{avec } \square = 1/3$$

$$\leqslant K+2\left(\frac{1-0}{1+\square}-K'\right)$$

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée.

3. Conclusion : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, majorée par $K+2\left(\frac{1-0}{1+\square}-K'\right)$ donc elle converge.

Solution de l'exercice 21 (Énoncé)

1. On a

$$Q_k \frac{\sin\left(\frac{1}{k^2}\right)}{\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}} = k(k+1)\sin(\square) = k(k+1)\left(\square+o(\square)\right) = 1+o(1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

OUPS j'ai oublié un facteur 2 ! ! ! ! en fait c'est $\forall\, k \geqslant N_0,\ \sin\left(\frac{1}{k^2}\right) \leqslant 2\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right]$.

J'applique la définition de "$Q_k \to {}^1/_2$ " avec $\varepsilon = {}^1/_2 > 0$

Ainsi il existe un rang N_0 tel que $\forall\, k \geqslant N_0,\ Q_k \leqslant \ell+\varepsilon = {}^1/_2 + {}^1/_2 = 1$

$$\Longrightarrow \sin\left(\frac{1}{k^2}\right) \leqslant 2\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right]$$

2. On somme l'inégalité précédent de $k=N_0$ à $k=n$, CàD **là où elle est valide**

$$\text{ainsi } \sum_{k=N_0}^{n} \sin\left(\frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=N_0}^{n} \sin\left(\frac{1}{k^2}\right) \leqslant 2\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right]$$

On télescope

$$\leqslant 2\left[\frac{1}{N_0}-\frac{1}{n+1}\right] \leqslant \frac{2}{N_0}$$

On ajoute les terme qui manquent, ainsi : $U_n \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{N_0-1} \sin\left(\frac{1}{k^2}\right)}_{Konstante} + \frac{2}{N_0} = K + \frac{2}{N_0}$

3. Conclusion : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (facile), majorée par $K+\frac{2}{N_0}$ donc elle converge.

Solution de l'exercice 22 (Énoncé)

1. On a

$$z_{n+1} = x_{n+1}+i\,y_{n+1} = \frac{x_n-y_n}{2}+i\frac{x_n+y_n}{2} = (x_n+i\,y_n)\left(\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\right)z_n$$

2. La suite (z_n) est une suite géo, ainsi on a $z_n = z_0\left(\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\right)^n$.

On a $\left|\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ainsi

$$\text{Ainsi } |z_n-0| = |z_n| = |z_0|\left|\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\right|^n = |z_0|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

Conclusion : on a donc $|z_n-0| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. La suite converge (z_n) vers 0.

De plus on sait que $|x_n-0| = |x_n| = |\mathrm{Re}(z_n)| \leqslant |z_n|$. Ainsi la suite converge (x_n) vers 0.

Solution de l'exercice 23 (Énoncé)

1. Convexité.
2. On montre facilement par une récurrence à 2 étages que $H_{<n>} : u_n \geqslant 0$.

En suite on a $u_{n+1}-u_n = \frac{1}{2^{n-1}}u_{n-1} \geqslant 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

3. Majorée ?

(a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n + \frac{1}{2^{n-1}}u_{n-1}\\
&\leqslant u_n + \frac{1}{2^{n-1}}u_n \qquad \textit{car la suite est croissante}\\
&\leqslant u_n\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\\
&\qquad \textit{on utilise Q1. avec } x = e^{1/2^{n-1}}\\
&\leqslant u_n \underbrace{e^{1/2^{n-1}}}_{K_n}
\end{aligned}$$

(b) On a "À la mode géo"

$$\begin{aligned} u_n &\leqslant K_{n-1}u_{n-1} \\ &\leqslant K_{n-1}K_{n-2}u_{n-2} \\ &\vdots \\ &\leqslant K_{n-1}K_{n-2}\cdots K_0\, u_0 \end{aligned}$$

De plus $K_{n-1}K_{n-2}\cdots K_0 = \exp\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right) = \exp\left(\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\right) \leqslant \exp\left(\frac{1-0}{1-\frac{1}{2}}\right) = e^2$

Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant e^2\, u_0$

(c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $e^2 u_0$
donc elle converge vers $\ell \leqslant e^2 u_0$.

Solution de l'exercice 24 (Énoncé)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$0 < u_1 \leqslant u_2 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{1}{n}u_n.$$

1. On démontre facilement par récurrence à deux étage que : $H_{<n>} : u_n > 0$

   Ainsi $\quad \forall\, n \geqslant 2,\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n-1}u_{n-1} > 0$

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

2.
   (a) Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a $0 < u_1 \leqslant u_2 \leqslant \ldots \leqslant u_n \leqslant \ldots . \leqslant \ell$

   (b) Je considère $Q_n = \dfrac{u_n - u_{n-1}}{\frac{\ell}{2n}} = \dfrac{2}{\ell}n(u_n - u_{n-1})$

   > On a $\quad Q_n = \dfrac{2}{\ell}n(u_n - u_{n-1}) = \dfrac{2}{\ell}n\dfrac{u_{n-2}}{n-2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{2}{\ell}\ell = 2.$

   > J'applique la def de "$Q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$" avec $\varepsilon = 1 > 0$

   Ainsi il existe N_0 tq $\forall\, n \geqslant N_0,\ A_n = n(u_n - u_{n-1})\ \geqslant \ell - \varepsilon = 2 - 1 = 1$

   $$\implies u_n - u_{n-1} \geqslant \frac{\ell}{2n}$$

   (c) On a maintenant "À la mode Géo"

   $$\begin{aligned} u_n &\geqslant \frac{\ell}{2n} + u_{n-1} \\ &\geqslant \frac{\ell}{2n} + \left[\frac{\ell}{2(n-1)} + u_{n-2}\right] \\ &\geqslant \frac{\ell}{2n} + \frac{\ell}{2(n-1)} + \left[\frac{\ell}{2(n-2)} + u_{n-3}\right] \\ &\vdots \\ &\geqslant \underbrace{\frac{\ell}{2n} + \frac{\ell}{2(n-1)} + \frac{\ell}{2(n-2)} + \cdots + \frac{\ell}{2(N_0+1)}}_{=\frac{\ell}{2}(H_n - H_{N_0})} + u_{N_0} \end{aligned}$$

   Conclusion : $\forall\, n \geqslant N_0, \quad u_n \geqslant u_{N_0} + \dfrac{\ell}{2}\left(H_n - H_{N_0}\right).$

   (d) On a admis que $H_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$,

   Comme $\ell > 0$, on a $u_{N_0} + \dfrac{\ell}{2}\left(H_n - H_{N_0}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

   donc à cause du théorème de comparaison, on a $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

   OUPS ! ! ! ! !

3. On a donc. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et elle ne converge pas dans $\mathbb{R}$

   Conclusion : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Solution de l'exercice 25 (Énoncé)

1. Convergence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Montrer que $\forall n,\ v_n \geqslant 2^n v_0$.
   On fait "facilement" par récurrence $H_{<n>} : v_n \geqslant 2^n v_0$
   (b) Que peut-on conclure ?
   On a avec les théorème de comparaison
$$\left.\begin{array}{l}\forall n,\ v_n \geqslant 2^n v_0\\ 2^n v_0 \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \textit{La suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ diverge vers } +\infty$$
2. Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Donner une majoration de $u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.
   Pour tout n, on a avec ce qui précède $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{2}{v_n} \leqslant \frac{1}{2}u_n + \frac{2}{2^n v_0}$
   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \leqslant \frac{2}{2^n v_0} = \frac{K}{2^n}$
   (b) En déduire une majoration u_n. (Difficile)
   On va faire un "À la mode géo" délicat. On a
$$\begin{array}{ll} u_n - \frac{1}{2}u_{n-1} \leqslant \frac{K}{2^{n-1}} & (I_n)\\ u_{n-1} - \frac{1}{2}u_{n-2} \leqslant \frac{K}{2^{n-2}} & (I_{n-1})\\ u_{n-2} - \frac{1}{2}u_{n-3} \leqslant \frac{K}{2^{n-3}} & (I_{n-2})\\ \vdots & \\ u_1 - \frac{1}{2}u_0 \leqslant \frac{K}{2^0} & (I_1)\end{array}$$
   On fait la somme pondérée des inégalités, CàD $I_n + \frac{1}{2}I_{n-1} + \frac{1}{2^2}I_{n-2} + \cdots + + \frac{1}{2^{n-1}}I_0$,
   Ainsi après simplification, on a
$$\begin{aligned} u_n - \frac{1}{2^n}u_0 &\leqslant \frac{K}{2^{n-1}} + \frac{K}{2^{n-1}} + \cdots + \frac{K}{2^{n-1}}\\ &\leqslant \frac{K\times n}{2^{n-1}}\end{aligned}$$
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
   On a $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant \underbrace{\frac{1}{2^n}u_0 + \frac{K\times n}{2^{n-1}}}_{M_n}$
   Comme $0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ croissance comparée,
   Conclusion (théorème des gendarmes) : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Solution de l'exercice 26 (Énoncé)

1. *Étude de* $f : x \longmapsto \arctan(x)$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $\forall x \geqslant e,\ f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Ainsi on a le tableau

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$

Étude de $h : x \longmapsto f(x) - x = \arctan(x) - x$
La fonction h est dérivable sur $[e, +\infty[$
et $\forall x \geqslant e,\ h'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - 1$
$= \dfrac{-x^2}{1+x^2}$
Ainsi on a le tableau

x	$-\infty$	0	∞
$h(x)$	$+\infty$ ↘	0 ↘	$-\infty$

2. On démontre par récurrence H<n> : le nombre u_n se calcule et $u_n \in [0,1]$
   > Initialisation avec $n = 0$ Pas de pb car $u_0 = 1$
   > Hérédité. On suppose $H < n >$.
   Comme le nombre u_n se calcule et f est définie sur $\mathbb{R}$
   donc $u_{n+1} = f(u_n)$ se calcule.
   De plus on a
   $$\left.\begin{array}{r} 0 \leqslant u_n \geqslant 1 \\ \textit{La fonction } f \textit{ est croissante sur } [0,1] \end{array}\right\} \Longrightarrow f(0) \leqslant \underbrace{f(u_n)}_{=u_{n+1}} \leqslant f(1)$$
   Comme $f(0) = 0$ et $f(1) = arctan(1) = \dfrac{\pi}{4} < 1$
   Conclusion : $H < n+1 >$ est vraie
3. Comme f est continue, on sait que ℓ les limites possibles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\ell = f(\ell)$ et aussi que $\ell \in [0,1]$,
   CàD ℓ est une solution de l'eq $h(X) = X$ dans $[0,1]$

   D'après $Q1$ l'unique solution de l'équation est 0.
   Conclusion : **Si** la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors elle converge vers 0.
4. Convergence ?
   (a) On a $u_1 - u_0 = h(u_0) < 0$ d'après le tableau de variation h et $u_0 = 1$
   On démontre par récurrence H<n> : $u_{n+1} < u_n$
   > Initialisation avec $n = 0$ Pas de pb
   > Hérédité. On suppose $H < n >$.
   On a
   $$\left.\begin{array}{r} u_{n+1} < u_n \\ \textit{La fonction } f \textit{ est croissante sur } [0,1] \end{array}\right\} \Longrightarrow \underbrace{f(u_{n+1})}_{=u_{n+2}} \leqslant \underbrace{f(u_n)}_{=u_{n+1}}$$
   Conclusion : $H < n+1 >$ est vraie
   (b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0
   Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \geqslant 0$

   Or D'après Q2, on a forcément $\ell = 0$.
   Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0

Solution de l'exercice 27 **(Énoncé)**

1. *Étude de* $f : x \longmapsto x - x^2$
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$
   et $\forall x \geqslant e,\ f'(x) = 1 - 2x$
   Ainsi on a le tableau

x	$-\infty$	0	$1/2$	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	$1/4$ ↘	0 ↘	$-\infty$

Étude de $h : x \longmapsto f(x) - x = \left[x - x^2\right] - x = -x^2$
On a le tableau

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↘	$-\infty$

2. Comme f est continue, on sait que ℓ les limites possibles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\ell = f(\ell)$,
   CàD ℓ est une solution de l'eq $h(X) = X$ dans $\mathbb{R}$

   D'après $Q1$ l'unique solution de l'équation est 0.
   Conclusion : **Si** la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors elle converge vers 0.
3. On suppose que $u_0 \in [0,1]$

(a) On démontre par récurrence H<n> : $u_n \in [0, {}^1/_4\,]$

> Initialisation avec $n=1$

On sait que $u_0 \in [0,1]$ et d'après Q1, quand $x \in [0,1]$ sur $f(x) \in [0, {}^1/_4\,]$

Donc $u_1 \in [0, {}^1/_4\,]$ Donc $H<1>$ est vraie

> Hérédité. On suppose $H<n>$.

On a

$$\left.\begin{array}{r} u_n \in u_n \in [0, {}^1/_4\,] \subset [0,1] \\ \textit{D'après Q1, quand } x \in [0,1] \textit{ sur } f(x) \in [0, {}^1/_4\,] \end{array}\right\} \Longrightarrow \underbrace{f(u_n)}_{=u_{n+1}} \in [0, {}^1/_4]$$

Conclusion : $H<n+1>$ est vraie

(b) On a $u_1 - u_0 = h(u_0) \leqslant 0$ d'après le tableau de variation h

On démontre par récurrence H<n> : $u_{n+1} < u_n$

> Initialisation avec $n=0$ Pas de pb

> Hérédité. On suppose $H<n>$.

On a

$$\left.\begin{array}{r} 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant {}^1/_4 \\ \textit{La fonction } f \textit{ est croissante sur } [0, {}^1/_4\,] \end{array}\right\} \Longrightarrow \underbrace{f(u_{n+1})}_{=u_{n+2}} \leqslant \underbrace{f(u_n)}_{=u_{n+1}}$$

Conclusion : $H<n+1>$ est vraie

Conclusion : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \geqslant 0$

Or D'après Q2, on a forcément $\ell = 0$.

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0

4. On suppose que $u_0 \notin [0,1]$

(a) On sait que $u_0 \notin [0,1]$ et d'après Q1, quand $x \notin [0,1]$ sur $f(x) < 0$

Donc $u_1 < 0$.

On fait maintenant une récurrence car f est croissante sur $\mathbb{R}_-$

(b) On démontrer par récurrence $H<n>$: $u_{n+1} \leqslant u_n$

conclusion la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

MAIS Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors elle converge vers $\ell \leqslant u_1 < 0$! ! !

Ceci est impossible car la seule limite possible c'est $\ell = 0$

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et ne converge pas dans $\mathbb{R}$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$

Solution de l'exercice 29 (Énoncé)

1. *Étude de* $f : x \longmapsto \sqrt{2-x}$

La fonction f est déf/cont sur $]-\infty, 2]$ et dérivable sur $]-\infty, 2[$

et $\forall\, x < 2,\ f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{2-x}} < 0$

Ainsi on a le tableau

x	$+\infty$	0	0
$f(x)$	∞	$\sqrt{2}$	0

Étude de $h : x \longmapsto f(x) - x = \sqrt{2-x} - x$

La fonction h est déf/cont sur $]-\infty, 2]$ et dérivable sur $]-\infty, 2[$

et $\forall\, x < 2e,\ h'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{2-x}} - 1$

$$= \frac{-1 - 2\sqrt{2-x}}{2\sqrt{2-x}} < 0$$

Ainsi on a le tableau

x	$-\infty$	1	2
$h(x)$	$+\infty$	0	-2

2. On démontre par récurrence H<n> : le nombre u_n se calcule et $u_n \in \left[0, \sqrt{2}\right]$

> Initialisation avec $n=1$

on sait que : $u_0 =\in [0,2]$ et d'après Q1, quand $x \in [0,2]$ alors $f(x) \in \left[0, \sqrt{2}\right]$

Donc $u_, = f(u_0) \in \left[0, \sqrt{2}\right]$

> Hérédité. On suppose $H<n>$.

$$\left.\begin{array}{c} 0 \leqslant u_n \geqslant \sqrt{2} < 2 \\ \textit{La fonction } f \textit{ est dé-croissante sur } [0,2] \end{array}\right\} \Longrightarrow f(0) \leqslant \underbrace{f(u_n)}_{=u_{n+1}} \leqslant f(\sqrt{2}) < f(2)$$

Comme $f(0) = 0$ et $f(2) = \sqrt{2}$

Conclusion : $H < n+1 >$ est vraie

3. Comme f est continue, on sait que ℓ les limites possibles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\ell = f(\ell)$ et aussi que $\ell \in \left[0, \sqrt{2}\right]$,

   CàD ℓ est une solution de l'eq $h(X) = X$ dans $\left[0, \sqrt{2}\right]$

   D'après $Q1$ l'unique solution de l'équation est 1.

   Conclusion : **Si** la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors elle converge vers 1.

4. C'est le TAF sur $\left[0, \sqrt{2}\right]$

Solution de l'exercice 32 (Énoncé) 1et2 On démontre par récurrence H<n> : les nombres u_n et v_n se calculent et $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$

> Initialisation avec $n = 0$

OK car $0 < u_0 < v_0$

> Hérédité. On suppose $H < n >$.

Comme les nombres u_n et v_n se calculent et $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$

Donc $u_{n+1} = \sqrt{\underbrace{u_n\, v_n}_{>0}}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ se calculent

De plus $u_{n+1} = \sqrt{\underbrace{u_n\, v_n}_{>0}}$ est positif car c'est une racine et

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{v_n + u_n}{2} - \sqrt{v_n\, u_n} \\ &= \frac{v_n + u_n - 2\sqrt{v_n\, u_n}}{2} \\ &= \frac{(v_n + u_n)^2 - 4\left(\sqrt{v_n\, u_n}\right)}{2\left[v_n + u_n + 2\sqrt{v_n\, u_n}\right]} = \frac{(v_n)^2 + (u_n)^2 - 2v_n\, u_n}{Bas > 0} = \frac{(v_n - u_n)^2}{Bas > 0} > 0 \end{aligned}$$

Conclusion : $H < n+1 >$ est vraie

3 Pour tout n, on a

$$v_{n+1} - v_n = \frac{v_n + u_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} < 0 \textit{ car } \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n.$$

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n\, v_n} - u_n = \frac{u_n\, v_n - (u_n)^2}{\sqrt{u_n\, v_n} + u_n} = \frac{u_n\,(v_n - u_n)}{\sqrt{u_n\, v_n} + u_n} > 0 \textit{ car } \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n.$$

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4 il est difficile de montrer que les suites sont adjacentes,

CàD montrer directement que $v_n - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ est délicat.

On reprend la démo des suites adjacentes, CàD

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$

Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell_u \leqslant v_0$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell_v \geqslant u_0$

On regarde ce que devient la relation $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$,

ainsi $\ell_v = \dfrac{\ell_u + \ell_v}{2}$ donc $\ell_u = \ell_v$

Conclusion : les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite $\ell = \ell_u = \ell_v$