Question Python.

> Écrire un fonction python qui prend n en argument et renvoie la liste de ses diviseurs positifs.
> Écrire un fonction python qui prend n en argument et renvoie true si n est un carré, et false sinon.
> Écrire un test python qui "dit" si a appartient à une liste, CàD trouver la "fonction" python qui fait le Job.

Exercice 1. [Correction] On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 > 1 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 1 + \frac{1}{u_n - 1}$$

On considère les fonctions $f : x \longmapsto x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$ et $h : x \longmapsto f(x) - x$

1. Étudier les fonctions f et h.
2. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 1$
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans $\mathbb{R}$
4. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
5. *Nous cherchons dans cette question à déterminer à quelle vitesse la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.*
   (a) Montrer que : $\forall\, k \in \mathbb{N},\ u_k \geqslant k+1$
   (b) Montrer que : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_{k+1} - u_k - 1 \leqslant \dfrac{1}{k}$.
   (c) En déduire que : $\forall\, n \geqslant 2,\ 0 \leqslant u_n - u_1 - (n-1) \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.
   (d) Interlude :
      i. Montrer que : $\forall\, x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$.
         En déduire $\forall\, k \geqslant 2,\ \dfrac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$
      ii. En déduire $\forall\, n \geqslant 1,\ H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n) + 1$
   (e) En déduire que : $\forall\, n \geqslant 3,\ n+1 \leqslant u_n \leqslant u_1 + n + \ln(n-1)$
   Enfin conclure que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} n$

Exercice 2. [Correction] On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 > 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n + u_n^2}{2}.$$

Partie A. Convergence.

1. Étudier les fonctions $f : x \longmapsto \dfrac{x+x^2}{2}$ et $h : x \longmapsto f(x) - x$.
2. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 1$.
3. Déterminer les limites possibles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
4. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Partie B. Étude d'une suite auxiliaire.

On considère la suite (a_n) par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{1}{2^n}\ln\left(\dfrac{u_n}{2}\right)$. *Remarque Comme $u_n > 1$ donc le nombre a_n est bien définie.*

1. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)$

   En déduire la monotonie de la suite (a_n).
2. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} \leqslant a_n + \dfrac{\ln(2)}{2^{n+1}}$,

   puis que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \leqslant a_0 + \ln(2)\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}$.
3. En déduire que la suite (a_n) est convergente vers une limite noté α

Partie C. Un équivalent de u_n

1. En utilisant $QB1.$, montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant a_{n+1} - a_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}u_n}$.
2. Montrer que : $\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant a_{n+p} - a_n \leqslant \dfrac{1}{u_n}\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2^{n+k}}$
3. En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \alpha - a_n \leqslant \dfrac{1}{2^n u_n}$.
4. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de a_n

   En déduire que : $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} 2\,e^{\alpha 2^n}$

Exercice 3. [Correction] On suppose que $n \in \mathbb{N}^*$.
On considère les fonctions P_n, définies par

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots - \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}$$

Il est facile de voir que les fonctions P_n sont $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathscr{D} = [0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Partie A. Définition du nombre x_n.

1. Calculer P_n' et vérifier que : $\forall x \geqslant 0,\ P_n'(x) = \dfrac{x^{2n}-1}{x+1}$
2. En déduire le tableau variation sur $\mathscr{D}$ de de la fonction P_n (avec les limites aux bornes)
3. Justifier $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(1) < 0$ et montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(2) > 0$
4. Montrer que l'équation $P_n(X) = 0$ admet une unique solution dans $]1, 2[$.

On note x_n cette solution, on a donc $P_n(x_n) = 0$.

Partie B. Convergence de la suite (x_n).

1. Montrer que : $\forall x \geqslant 0,\ P_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt$.
2. Montrer que : $\forall t \geqslant 1,\ n\left(t^2 - 1\right) \leqslant t^{2n} - 1$
3. En déduire que : $\forall x \geqslant 1,\ P_n(x) - P_n(1) \geqslant \dfrac{n}{2}(x-1)^2$

$$\text{Ainsi on a } \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \frac{n}{2}(x_n - 1)^2 \leqslant \underbrace{P_n(x_n)}_{=0} - P_n(1) = -P_n(1)$$

4. En utilisant QB1., montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ -\ln(2) \leqslant P_n(1) \leqslant 0$
5. En déduire une majoration de $|x_n - 1|$ et conclure.

Exercice 4. [Correction]

1. Un résultat préliminaire.
   (a) Soit (w_n) une suite qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.

   Montrer qu'il existe N_0 tel que Si $N_0 \leqslant n \leqslant p$ alors $|w_p - w_n| \leqslant {}^1/_2$

   Indication : On remarquera que : $w_p - w_n = (w_p - \ell) - (w_n - \ell)$

   (b) Soit (w_n) une suite **<u>d'entier</u>**. Montrer que

   La suite (w_n) (d'entier) converge Ssi La suite (w_n) constante à partir d'un certain rang.

2. Soit (a_n) une suite d'entier tel que $a_1 \geqslant 2$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} \geqslant (a_n)^2 - a_n + 1$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $U_n = \dfrac{1}{a_1} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}$

   On réduit U_n sous forme d'une fraction pas forcément irréductible, ainsi

   $U_n = \dfrac{1}{a_1} + \cdots + \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{Moche}{a_1 \cdots a_n} = \dfrac{y_n}{x_n}$ avec $x_n = a_1 \cdots a_n$ et $y_n = Moche$ un entier (unique)

   Enfin on considère $V_n = \dfrac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}$

   (a) Montrer que la suite (a_n) divergent vers $+\infty$.

   (b) Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont strictement croissantes.

   (c) Où l'on montre que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

   i. Calculer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.

   En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ V_n - U_n = \dfrac{1}{a_{n+1} - 1}$.

   ii. En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ V_{n+1} - V_n = \dfrac{1}{a_{n+2} - 1} + \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_{n+1} - 1}$.

   iii. Conclure que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

   On note ℓ la limite commune des deux suites.

   (d) On suppose que $\ell = \dfrac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$

   i. En utilisant les propriétés des suites (U_n) et (V_n), montrer que
   la suite $(p\,x_n - q\,y_n)$ est décroissante,
   puis qu'elle est stationnaire à partir d'un certain rang.

   ii. En déduire que la suite (V_n) est stationnaire à partir d'un certain rang
   puis qu'il existe un rang N_0 tel que : $\forall\, n \geqslant N_0,\ a_{n+1} = (a_n)^2 - a_n + 1$

   (e) Application

   Soit p un entier avec $p \geqslant 2$.

   Montrer que la suite $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p^{2^k}}$ converge et que sa limite $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^{2^k}}$ est un irrationnel.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. Étudier les fonctions f et h.

   > La fonction f est dérivable et

$$\forall x \neq 1,\ f'(x) = 1 + 0 + \frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{Bas > 0}$$

   D'où le tableau

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

   > La fonction h est dérivable et $\forall x \neq 1,\ h'(x) = 0 + \dfrac{-1}{(x-1)^2} < 0$

   D'où le tableau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$h'(x)$				$-$	||	$+$	
h	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1

2. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 1$

   On fait par récurrence $H_{<n>}$: le nombre u_n se calcule et $u_n > 1$

   Initialisation $n = 0$

   Comme $u_0 > 1$, donc $H_{<0>}$ est vraie

   Hérédité. On suppose $H_{<n>}$

   > Comme f est définie sur $]1,\infty[$ et $u_n > 1$, donc u_{n+1} se calcule

   > De plus

$$\left.\begin{array}{l} u_n > 1 \quad \textit{d'après } H_{<n>} \\ \forall x \in [1,\infty[,\ f(x) \geqslant 4 \quad \textit{voir Q1} \end{array}\right\} \Longrightarrow u_{n+1} \geqslant 4 > 1$$

   donc $H_{<n+1>}$ est vraie

3. Déterminer les limites possibles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

   On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.

   Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ et f est continue, on sait que $\ell = f(\ell)$

$$\ell = f(\ell) \iff \ell = \ell + 1 + \frac{1}{\ell - 1} \iff \frac{1}{\ell - 1} = -1 \iff 1 = 1 - \ell \iff \ell = 0$$

   De plus $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 1$ donc $\ell \geqslant 1$. Or $\ell = 0$ OUPS

   Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans $\mathbb{R}$.

4. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

   Pour tout n, on a $u_{n+1} - u_n = 1 + \dfrac{1}{u_n - 1} \geqslant 1 + O > 0$

   Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

   Conclusion : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et ne converge pas, ainsi elle diverge vers $+\infty$

5. *Nous cherchons dans cette question à déterminer à quelle vitesse la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.*

   (a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ u_k \geqslant k + 1$

   On fait par récurrence $H_{<k>}$: $u_k \geqslant k + 1$

   Initialisation $n = 0$

   Comme $u_0 \geqslant 1$, donc $H_{<0>}$ est vraie

   Hérédité. On suppose $H_{<k>}$

Comme $u_k \geqslant 1$, on a

$$u_{k+1} = u_k + 1 + \frac{1}{u_k - 1} \geqslant k + 1 + O = k + 1$$

donc $H_{<k+1>}$ est vraie

(b) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_{k+1} - u_k - 1 \leqslant \frac{1}{k}$

Pour tout n, on a $u_{k+1} - u_k - 1 = \dfrac{1}{u_k - 1}$ et $u_k \geqslant k + 1$

Ainsi $O \leqslant \dfrac{1}{u_k - 1} \leqslant \dfrac{1}{(k+1)-1} = \dfrac{1}{k}$

(c) En déduire que : $\forall n \geqslant 2,\ 0 \leqslant u_n - u_1 - (n-1) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.

Récurrence ou Télescopage

> $\forall k \geqslant 1$, on a $1 \leqslant u_{k+1} - u_k \leqslant 1 + \frac{1}{k}$

> On somme l'encadrement de $k = 1$ à $k = n - 1$

$$\text{ainsi on a } \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} 1}_{=(n-1)} \leqslant u_n - u_1 \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n-1} 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$\leqslant (n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

(d) Interlude :

i. Montrer que : $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$. En déduire $\forall k \geqslant 2,\ \frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$

Par concavité de $\ln(1+x)$, on sait que $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$

> Pour tout $k \geqslant 2$, on a $\ln(k) - \ln(k-1) = -\ln\left(\dfrac{k-1}{k}\right)$

$$= -\ln(1 + \square) \ \textit{avec}\ \square = \frac{-1}{k} > -1$$

$$\text{Or } \ln(1+\square) \leqslant \square \text{ donc } -\ln(1+\square) \geqslant -\square = -\frac{-1}{k} = \frac{1}{k}$$

ii. En déduire $\forall n \geqslant 1,\ H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n) + 1$

Télescopage. On somme l'inégalité précédente de $k = 2$ à $k = n$

$$\text{Ainsi on a } \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \underbrace{\sum_{k=12}^{n} [\ln(k) - \ln(k-1)]}_{=\ln(n)-\ln(1)}$$

On ajoute l'item $k = 1$, ainsi $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n) + 1$

(e) En déduire que : $\forall n \geqslant 3,\ n + 1 \leqslant u_n \leqslant u_1 + n + \ln(n-1)$. Enfin conclure que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} n$

> pour $n \geqslant 3$, on sait que $0 \leqslant u_n - u_1 - (n-1) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ et $H_{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n-1) + 1$

Donc on a bien $\forall n \geqslant 3,\ n + 1 \leqslant u_n \leqslant u_1 + n + \ln(n-1)$

> Enfin on a : $\dfrac{n+1}{n} \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant \dfrac{u_1 + n + \ln(n-1)}{n}$

Donc avec les gendarmes, on a bien $\dfrac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, CàD $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} n$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

Partie A. Convergence.

1. Étudier les fonctions $f : x \longmapsto \dfrac{x+x^2}{2}$ et $h : x \longmapsto f(x) - x$.

   > La fonction f est dérivable et $\forall\, x,\ f'(x) = \dfrac{1+2x}{1}$

   D'où le tableau

x	$-\infty$	-1	$-1/2$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		+	
$f(x)$	$+\infty$	0	$-1/8$	0	1	$+\infty$

   > La fonction h est dérivable et $\forall\, x,\ h'(x) = \dfrac{-1+2x}{1}$

   D'où le tableau

x	$-\infty$	0	$1/2$	1	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	+	
$h(x)$	$+\infty$	0	$-1/8$	0	$+\infty$

2. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 1$.

   On fait par récurrence $H_{<n>}$: le nombre u_n se calcule et $u_n \geqslant 1$

   Initialisation $n = 0$

   Comme $u_0 \geqslant 1$, donc $H_{<0>}$ est vraie

   Hérédité. On suppose $H_{<n>}$

   > Comme f est définie sur $\mathbb{R}$, donc u_{n+1} se calcule

   > De plus

$$\left.\begin{array}{r} u_n \geqslant 1 \quad \textit{d'après } H_{<n>} \\ f \textit{ est croissante sur } [1,+\infty[\ \textit{voir Q1} \end{array}\right\} \Longrightarrow f(u_n) \geqslant \underbrace{f(1)}_{=1},\ \text{CàD } u_{n+1} \geqslant 1$$

   donc $H_{<n+1>}$ est vraie

3. Déterminer les limites possibles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

   On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.

   Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ et f est continue, on sait que

$$\ell = f(\ell) = \frac{\ell+\ell^2}{2} \iff \ell = 0 \text{ ou } \ell = 1$$

   De plus $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 1$ donc $\ell \geqslant 1$

   Conclusion : La seule limite possible, c'est $\ell = 1$

4. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

   On démontre facilement par récurrence que $H_{<n>} : u_{n+1} \geqslant u_n$, donc la suite est croissante.

   On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv vers ℓ

   Comme $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant u_0 > 1$ ainsi $\ell \geqslant u_1 > 1$

   Or forcément $\ell = 1$ donc OUPS, CàD la suite ne converge pas dans $\mathbb{R}$.

   Conclusion : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et ne converge pas dans $\mathbb{R}$

   Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Partie B. Étude d'une suite auxiliaire.

On considère la suite (a_n) par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{2^n}\ln\left(\frac{u_n}{2}\right)$.

Remarque Comme $u_n > 1$ donc le terme v_n est bien définie.

1. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$. En déduire la monotonie de la suite (a_n).

Pour tout n, on a

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(\frac{u_{n+1}}{2}\right) - \frac{1}{2^n}\ln\left(\frac{u_n}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\left[\ln\left(\frac{u_{n+1}}{2}\right) - 2\ln\left(\frac{u_n}{2}\right)\right]\\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\left[\ln\left(\frac{\frac{u_{n+1}}{2}}{\frac{u_n^2}{4}}\right)\right]\\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(\frac{2\,u_{n+1}}{u_n^2}\right) = \frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi Pour tout n, on a $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \geqslant \frac{1}{2^{n+1}}\ln(1 + O) = O$

Conclusion : la suite (a_n) est croissante.

2. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} \leqslant a_n + \frac{\ln(2)}{2^{n+1}}$, puis que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \leqslant a_0 + \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}$

Comme $u_n \geqslant 1$, on a

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}\ln(1+1) = \frac{\ln(2)}{2^{n+1}}$$

On en déduit par récurrence ou à la mode Géo que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \leqslant a_0 + \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}$,

3. En déduire que la suite (a_n) est convergente vers une limite noté α

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
a_n &\leqslant a_0 + \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\\
&\leqslant a_0 + \ln(2)\left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - {}^1\!/_2} - 1\right]\\
&\leqslant \underbrace{a_0 + \ln(2)\left[\frac{1 - O}{1 - {}^1\!/_2} - 1\right]}_{Majorant}
\end{aligned}$$

Conclusion : la suite (a_n) est croissante, majorée donc elle converge

Partie C. Un équivalent de u_n

1. En utilisant $QB1.$, montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant a_{n+1} - a_n \leqslant \frac{1}{2^{n+1}u_n}$.

> On sait déjà que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant a_{n+1} - a_n$

> De plus, on sait que $\forall\, x \geqslant 0,\ \ln(1+x) \geqslant x$,

ainsi pour tout n, on a

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}\frac{1}{u_n} \quad \textit{car}\ \frac{1}{u_n} > 0$$

2. Montrer que : $\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant a_{n+p} - a_n \leqslant \frac{1}{u_n}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2^{n+k}}$

> Comme la suite est croissante, on déjà que : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant a_{n+p} - a_n$
> De plus, on a

$$\begin{aligned} a_{n+p} - a_n &= (a_{n+p} - a_{n+p-1}) + (a_{n+p-1} - a_{n+p-2}) + \cdots + (a_{n+1} - a_n) \\ &\leqslant \frac{1}{2^{n+p}} \frac{1}{u_{n+p-1}} + \frac{1}{2^{n+p-1}} \frac{1}{u_{n+p-2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{u_n} \\ &\leqslant \frac{1}{2^{n+p}} \frac{1}{u_n} + \frac{1}{2^n} \frac{1}{u_n} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{u_n} \\ &\leqslant \frac{1}{u_n}\left[\frac{1}{2^{n+p}} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}\right] \\ &\leqslant \frac{1}{u_n} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^{n+k}} \end{aligned}$$

3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \alpha - a_n \leqslant \dfrac{1}{2^n u_n}$.

   On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^{n+k}} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1 - \left({}^1\!/_2\right)^{p+1}}{1 - {}^1\!/_2} \xrightarrow[p \to \infty]{} \frac{1}{2^n}$

   On regarde ce que devient l'encadrement $0 \leqslant a_{n+p} - a_n \leqslant \dfrac{1}{u_n} \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^{n+k}}$ quand $p \longrightarrow \infty$

   Ainsi $0 \leqslant \alpha - a_n \leqslant \dfrac{1}{2^n u_n}$

4. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de a_n. En déduire que : $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} 2e^{\alpha 2^n}$

   Comme $a_n = \dfrac{1}{2^n} \ln\left(\dfrac{u_n}{2}\right)$, on a

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \alpha - a_n \leqslant \frac{1}{2^n u_n} & \\ &\Longrightarrow 0 \leqslant \alpha - \frac{1}{2^n} \ln\left(\frac{u_n}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2^n u_n} \\ &\Longrightarrow 0 \leqslant 2^n \alpha - \ln\left(\frac{u_n}{2}\right) \leqslant \frac{1}{u_n} \\ &\Longrightarrow 0 \leqslant \ln\left(e^{2^n \alpha}\right) - \ln\left(\frac{u_n}{2}\right) \leqslant \frac{1}{u_n} \\ &\Longrightarrow 0 \leqslant \ln\left(\frac{u_n}{2e^{2^n \alpha}}\right) \leqslant \frac{1}{u_n} \end{aligned}$$

   Comme $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ donc $\leqslant \dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc $\ln\left(\dfrac{u_n}{2e^{2^n\alpha}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

   Conclusion : $\dfrac{u_n}{2e^{2^n \alpha}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, CàD $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} 2e^{\alpha 2^n}$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

Partie A. Définition du nombre x_n.

1. Calculer P_n' et vérifier que : $\forall x \geqslant 0,\ P_n'(x) = \dfrac{x^{2n}-1}{x+1}$

   Pour tout $x \geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned} P_n'(x) = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k x^{k-1} &= (-1) \sum_{k=1}^{2n} \square^{k-1} \\ &= (-1) \sum_{p=0}^{2n-1} \square^p \\ &= (-1) \left[\frac{1-(-x)^{2n}}{1-(-x)} \right] \\ &= (-1) \left[\frac{1-x^{2n}}{1+x} \right] = \frac{x^{2n}-1}{1+x} \end{aligned}$$

2. En déduire le tableau variation sur $\mathscr{D}$ de de la fonction P_n (avec les limites aux bornes)

   On sait (propriété des monômes) que sur $[0,+\infty[$, on a $x^{2n}-1 \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \geqslant 1$.
   D'où le tableau

3. Justifier $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(1) < 0$ et montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(2) > 0$

   Sur $[0,1]$ la fonction P_n est décroissante et $P_n(0) = 0$

   Donc $P_n(1) < 0$

   De plus on a

$$\begin{aligned} P_{n+1}(2) = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k 2^k}{k} &= P_n(2) - \frac{2^{2n+1}}{2n+1} + \frac{2^{2n+2}}{2n+2} \\ &= P_n(2) + 2^{2n+1} \left[\frac{-1}{2n+1} + \frac{2}{2n+2} \right] \\ &= P_n(2) + 2^{2n+1} \left[\frac{-1(2n+2)+2(2n+1)}{(2n+1)(2n+2)} \right] \\ &= P_n(2) + 2^{2n+1} \left[\frac{2n}{(2n+1)(2n+2)} \right] \\ \geqslant P_n(2) + O \end{aligned}$$

   Ainsi par une récurrence facile $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(2) > 0$

4. Montrer que l'équation $P_n(X) = 0$ admet une unique solution dans $]1,2[$.

   Sur $[1,2]$ la fonction P_n est continue et strictement croissante

   Donc elle réalise une bijection de $[1,2]$ sur $\Big[P_n(1), P_n(2)\Big]$

   Comme $0 \in \Big[P_n(1), P_n(2)\Big]$, l'équation $P_n(X) = 0$ admet une unique solution dans $]1,2[$.

Partie B. Convergence de la suite (x_n).

1. Montrer que : $\forall x \geqslant 0,\ P_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt$.

   Comme P_n est dérivable ou plutôt $\mathscr{C}^1$, on a

$$P_n(x_n) - P_n(0) = \int_0^{x_n} P_n'(t)\ dt = \int_0^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{1+t}\ dt$$

2. Montrer que : $\forall t \geqslant 1,\ n\left(t^2-1\right) \leqslant t^{2n}-1$

On le fait avec une étude de fonction,
Cependant (astuce). Pour $t \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned} t^{2n} - 1 &= f\left(t^2\right) - f(1) \\ &= f(b) - f(a) \\ &= \int_a^b f'(u)du \\ &= \int_1^{t^2} n.\underbrace{u^{n-1}}_{\geqslant 1} \, du \geqslant \int_1^{t^2} n.1 \, du = n\left(t^2 - 1\right) \end{aligned}$$

3. En déduire que : $\forall x \geqslant 1,\ P_n(x) - P_n(1) \geqslant \frac{n}{2}(x-1)^2$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P_n(x) - P_n(1) = \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1} dt - \int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1} dt$
$= \int_1^x \frac{t^{2n}-1}{t+1} dt$

Ainsi $\int_1^x \frac{t^{2n}-1}{t+1} dt \geqslant \int_1^x \frac{n\left(t^2-1\right)}{t+1} dt$
$\geqslant n \int_1^x (t-1)\, dt$
$\geqslant n \left[\frac{(t-1)^2}{2}\right]_1^x = n\frac{(x-1)^2}{2}$

4. En utilisant QB1., montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ -\ln(2) \leqslant P_n(1) \leqslant 0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait déjà que $P_n(1) \leqslant 0$
De plus

$$\begin{aligned} P_n(1) = \int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1} dt &\geqslant \int_0^1 \frac{O-1}{t+1} dt \\ &\geqslant \Big[-\ln|1+t|\Big]_0^1 = -\ln(2) \end{aligned}$$

5. En déduire une majoration de $|x_n - 1|$ et conclure.

Pour tout n, on a $0 \leqslant \frac{n}{2}(x_n-1)^2 \leqslant -P_n(1) \leqslant \ln(2)$

$$\text{Ainsi } (x_n-1)^2 \leqslant \frac{2\ln(2)}{n} \text{ et } |x_n - 1| \leqslant \sqrt{\frac{2\ln(2)}{n}}$$

Conclusion (théorème de la distance) : La suite (x_n) converge vers 1.

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

1. Un résultat préliminaire.
   (a) Montrer qu'il existe N_0 tel que Si $N_0 \leqslant n \leqslant p$ alors $|w_p - w_n| \leqslant 1/2$

   On a : $|w_p - w_n| = |(w_p - \ell) - (w_n - \ell)| \leqslant |w_p - \ell| + |w_n - \ell|$

   J'applique la définition de $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ avec $\varepsilon = 1/4$,

   Ainsi il existe N_0 tel que $\forall \alpha \geqslant N_0,\ |w_\alpha - \ell| \leqslant 1/4$

   Lorsque $N_0 \leqslant n \leqslant p$, on a $|w_p - w_n| \leqslant |w_p - \ell| + |w_n - \ell| \leqslant 1/4 + 1/4 = 1/2$

   (b) La suite (w_n) (d'entier) converge Ssi La suite (w_n) constante à partir d'un certain rang.

   le sens $\Longleftarrow$ est évident car une suite constante est convergente.

   On fait $\Longrightarrow$. On suppose que la suite (w_n) converge.

   La question précédent assure (avec $p = N_0$) qu'il existe N_0 tel que $\forall n \geqslant N_0$,

   on a : $distance(w_n, w_{N_0}) = |w_n - w_{N_0}| \leqslant 1/2$.

   De plus w_n, w_{N_0} sont des entiers donc $distance(w_n, w_{N_0}) = |w_n - w_{N_0}|$ est un entier positif.

   Conclusion $distance(w_n, w_{N_0}) = |w_n - w_{N_0}| = 0$, car 0 est le seul entier positif et $\leqslant 1/2$.

   Ainsi $\forall n \geqslant N_0,\ u_n = u_{N_0}$, CàD le suite (w_n) est constante égale à w_{N_0}.

2.
   (a) Montrer que la suite (a_n) divergent vers $+\infty$.

   On a : $a_{n+1} - a_n \geqslant ((a_n)^2 - a_n + 1) - a_n = (a_n - 1)^2 \geqslant 0$

   Donc la suite (a_n) est croissante et donc $\forall n,\ u_n \geqslant u_0 = 2$ et $a_{n+1} - a_n \geqslant (a_n - 1)^2 \geqslant 1$.

   On a maintenant $a_n \geqslant a_{n-1} + 1 \geqslant \cdots \geqslant a_0 + n$

   Le théorème de comparaison assure que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

   (b) Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont strictement croissantes.

   Comme $\forall n,\ a_n \geqslant 2$, la suite (x_n) et (U_n) sont positives et croissantes.

   Comme $y_n = x_n U_n$, on en déduit que la suite y_n est croissante.

   (c) Où l'on montre que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

   i. Calculer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ V_n - U_n = \dfrac{1}{a_{n+1} - 1}$.

   On a $x_{n+1} = x_n\, a_{n+1}$.

   De plus $U_{n+1} = U_n + \dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{y_n}{x_n} + \dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{a_{n+1}\, y_n + x_n}{x_n\, a_{n+1}}$ donc $y_{n+1} = a_{n+1}\, y_n + x_n$

   On a

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad V_n - U_n &= \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} - \frac{y_n}{x_n} \\
&= \frac{a_{n+1}\, y_n + x_n - y_n}{a_{n+1}\, x_n - x_n} - \frac{y_n}{x_n} \\
&= \frac{(a_{n+1} - 1)\, y_n + x_n}{(a_{n+1} - 1)\, x_n} - \frac{y_n}{x_n} \\
&= \frac{(a_{n+1} - 1)\, y_n}{(a_{n+1} - 1)\, x_n} + \frac{x_n}{(a_{n+1} - 1)\, x_n} - \frac{y_n}{x_n} \\
&= \frac{y_n}{x_n} + \frac{1}{(a_{n+1} - 1)} - \frac{y_n}{x_n} \\
&= \frac{1}{a_{n+1} - 1}
\end{aligned}$$

   ii. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ V_{n+1} - V_n = \dfrac{1}{a_{n+2} - 1} + \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_{n+1} - 1}$.

   On a

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad V_{n+1} - V_n &= (V_{n+1} - U_{n+1}) + (U_{n+1} - U_n) + (U_n - V_n) \\
&= \frac{1}{a_{n+2} - 1} + \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+1} - 1}
\end{aligned}$$

   iii. Conclure que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

   Les suites sont adjacentes car

> La suite (U_n) est croissante (facile car $\forall n \geqslant 2 > 0$).
> La suite (V_n) est décroissante car

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= \frac{1}{a_{n+2}-1} + \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+1}-1} \\ &= \cdots = \frac{(a_n)^2 - a_n + 1 - a_{n+1}}{(a_{n+2}-1)(a_{n+1})(a_{n+1}-1)} < 0 \quad \textit{car } \forall n,\ a_n \geqslant a_0 = 2 \textit{ et } a_{n+1} \geqslant (a_n)^2 - a_n + 1 \end{aligned}$$

> Enfin $V_n - U_n = \dfrac{1}{a_{n+1}-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ car $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

(d) On suppose que $\ell = \dfrac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$

i. montrer que la suite $(p x_n - q y_n)$ est décroissante, puis qu'elle est stationnaire à partir d'un certain rang.

La suite (x_n) est croissante, positive et $U_n \leqslant \ell = \dfrac{p}{q} \leqslant V_n$.

> Ainsi on a

$$\begin{aligned} (p x_{n+1} - q y_{n+1}) - (p x_n - q y_n) &= p(x_{n+1} - x_n) - q(y_{n+1} - y_n) \\ &= q(x_{n+1} - x_n)\left[\frac{p}{q} - \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}\right] \\ &= q(x_{n+1} - x_n)\left[\frac{p}{q} - V_n\right] \leqslant 0 \end{aligned}$$

la suite $(p x_n - q y_n)$ est donc décroissante

> De plus

$$p x_n - q y_n = p x_n \left[\frac{p}{q} - \frac{y_n}{x_n}\right] = p x_n \left[\frac{p}{q} - U_n\right] \geqslant 0$$

la suite $(p x_n - q y_n)$ est donc minorée par 0

la suite $(p x_n - q y_n)$ est une suite décroissante, minorée par 0
Donc elle converge.

> Enfin x_n, y_n ,p, q sont des entiers

Conclusion : la suite $(p x_n - q y_n)$ est une suite d'entier, qui converge
Donc elle est stationnaire à partir d'un certain rang.

.

ii. En déduire que la suite (V_n) est stationnaire à partir d'un certain rang
puis qu'il existe un rang N_0 tel que : $\forall n \geqslant N_0,\ a_{n+1} = (a_n)^2 - a_n + 1$

La suite $(p x_n - q y_n)$ est stationnaire à partir d'un certain rang

Donc il existe N_0 tel que

$$(p x_{n+1} - q y_{n+1}) - (p x_n - q y_n) = q(x_{n+1} - x_n)\left[\frac{p}{q} - V_n\right] = 0$$

Donc $\forall n \geqslant N_0,\ V_n = {}^{p}/_{q}$, CàD la suite (V_n) est stationnaire à partir du rang N_0

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } \forall n \geqslant N_0,\ 0 = V_{n+1} - V_n &= \frac{(a_n)^2 - a_n + 1 - a_{n+1}}{(a_{n+2}-1)(a_{n+1})(a_{n+1}-1)} \\ &\Longrightarrow a_{n+1} = (a_n)^2 - a_n + 1 \end{aligned}$$

(e) Application. Soit p un entier avec $p \geqslant 2$. Je pose $a_n = p^{2^n}$.

On a facilement que $a_{n+1} - \left[(a_n)^2 - a_n + 1\right] > 0$

Donc la suite (U_n) converge (conclusion de Q2.b.iii)

et comme la suite n'est pas stationnaire, sa limite $\ell \notin \mathbb{Q}$ (contraposée de Q3.c.ii)