Programme de colle de la semaine 11

du Lundi 16 Décembre au Vendredi 20 Décembre.

Questions de cours.

On a fini le semestre avec de l'arithmétique et je ne sait pas trop quoi mettre

Donc voici les 2 exo d'arithmétique de la banque CCP plus un exo de révision (quasi indispensable)

Il y a les corrections officielles de la banques (que l'ai remis en forme et parfois complétée (en bleu))

Exercice 1. [Correction] *Exercice n° 86 de la banque CCP*

1. Soit $(a,b,p)\in\mathbb{N}^3$. Prouver que : si $p\wedge a=1$ et $p\wedge b=1$, alors $p\wedge(ab)=1$.
2. Soit p un nombre premier.
   (a) Prouver que $\forall k\in[\![1,p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}k!$ puis en déduire que p divise $\binom{p}{k}$.
   (b) Prouver que : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \ n^p\equiv n \mod p$.
   Indication : procéder par récurrence.
   (c) En déduire, pour tout entier naturel n, que : p ne divise pas $n\Longrightarrow n^{p-1}\equiv 1 \mod p$.

Exercice 2. [Correction] Exercice n° 94 de la banque CCP.

1. Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.
2. Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux. Soit $c\in\mathbb{N}$.
   Démontrer que : $(a\,\text{divise}\,c$ et $b\,\text{divise}\,c)\iff(ab)\,\text{divise}\,c$.
3. On considère le système (S) : $\left\{\begin{array}{ccc} x & \equiv & 6 \quad [17] \\ x & \equiv & 4 \quad [15]\end{array}\right.$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.
   (a) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.
   (b) *Déduire des questions précédentes* la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S).

Exercice 3. [Correction] Exercice n° 89 de la banque CCP.

Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant 2$. On pose $z=e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$.

1. On suppose $k\in[\![1,n-1]\!]$.
   Déterminer le module et un argument du complexe z^k-1.
2. On pose $S=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left|z^k-1\right|$. Montrer que $S=\dfrac{2}{\tan\frac{\pi}{2n}}$.

Exercices.

Des exo sur les matrices (programme de la terminale). je commence Lundi le cours donc .....

Seul CARREL et PROVENCHERE n'ont pa suivi le bonus Math expert de terminale mais je ne doute pas qu'ils seront "réactif" *en fin de semaine.*

Correction.

Solution de l'exercice 1 **(Énoncé)** *Correction officielle de la banque CCP.*

1. On suppose $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$.

   D'après le théorème de Bézout,
   $\exists (u_1, v_1) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $u_1 p + v_1 a = 1$. (1)
   $\exists (u_2, v_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $u_2 p + v_2 b = 1$. (2)
   En multipliant les équations (1) et (2), on obtient :

$$\underbrace{(u_1 u_2 p + u_1 v_2 b + u_2 v_1 a)}_{\in \mathbb{Z}} p + \underbrace{(v_1 v_2)}_{\in \mathbb{Z}}(ab) = 1$$

   Donc le seul diviseur commun de p et ab c'est 1.
   Conclusion : $p \wedge (ab) = 1$.

2. Soit p un nombre premier.

   (a) Soit $k \in [\![1, p-1]\!]$. $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{p!}{k!(p-k)!} = \dfrac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!}$.

   Donc $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} k! = p(p-1)\dots(p-k+1)$. donc p divise $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} k!$. (3)

   Or, $p \wedge k = 1$ (car p est premier) donc, d'après 1., $p \wedge k! = 1$. C'est correction officielle ; le "donc" est plutôt rapide. À méditer ou pas

   Donc, d'après le lemme de Gauss, (3) $\Longrightarrow$ p divise $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}$.

   (b) Procédons par récurrence sur n.

   $>$ Pour $n = 0$ et pour $n = 1$, la propriété est vérifiée.

   $>$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété (P_n) : $n^p \equiv n \mod p$ soit vérifiée.

   Alors, d'après la formule du binôme de Newton, $(n+1)^p = n^p + \displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} n^k + 1$. (4)

   Or $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}$ donc p divise $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} n^k$.

   Donc d'après (4) et (P_n), $(n+1)^p \equiv n+1 \mod p$ et (P_{n+1}) est vraie.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que p ne divise pas n
   Comme p est premier, alors $p \wedge n = 1$.
   La question précédente donne p divise $n^p - n = n(n^{p-1} - 1)$.
   Or comme p est premier avec n, on en déduit, d'après le lemme de Gauss, que p divise $n^{p-1} - 1$.
   Ce qui signifie que $n^{p-1} \equiv 1 \mod p$. (petit théorème de Fermat).

Solution de l'exercice 2 (Énoncé) Correction officielle de la banque CCP. (mise en forme)

1. vous noterez que je n'ai pas expliciter ce théorème en classe

   Théorème de Bézout :

   Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$.
   $a \wedge b = 1 \Longleftrightarrow \exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2 \,/\, au + bv = 1$.

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$. On suppose que $a \wedge b = 1$.
   Soit $c \in \mathbb{N}$.
   Prouvons que $ab|c \Longrightarrow a|c \,\text{et}\, b|c$.

   Si $ab|c$ alors $\exists k \in \mathbb{Z} \,/\, c = kab$.
   Alors, $c = (kb)a$ donc $a|c$ et $c = (ka)b$ donc $b|c$.

   Prouvons que $(a|c \,\text{et}\, b|c) \Longrightarrow ab|c$.
   Démo de la correction officielle

   $a \wedge b = 1$ donc $\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2 \,/\, au + bv = 1$. (1)
   De plus $a|c$ donc $\exists k_1 \in \mathbb{Z} \,/\, c = k_1 a$. (2)
   De même, $b|c$ donc $\exists k_2 \in \mathbb{Z} \,/\, c = k_2 b$. (3)
   On multiplie (1) par c et on obtient $cau + cbv = c$.
   Alors, d'après (2) et (3), $(k_2 b)au + (k_1 a)bv = c$, donc $(k_2 u + k_1 v)(ab) = c$ et donc $ab|c$.

   Démo perso que je trouve plus simple et plus claire

   Comme a divise c, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $c = ak$
   On a maintenant : b divise $c = ak$ et b est premier avec a
   b divise k, CàD il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $k = bk'$
   Conclusion : $c = ak = a(bk') = ab.k'$, CàD ab divise c. Fini

   On a donc prouvé que $(a|c \,\text{et}\, b|c) \Longleftrightarrow ab|c$.

3. (a) **Première méthode** (méthode générale) :

   Soit $x \in \mathbb{Z}$.

   $$\text{On a} \quad x \,\text{solution de}(S) \iff \exists (k,k') \in \mathbb{Z}^2 \,\text{tel que}\, \begin{cases} x = 6 + 17k \\ x = 4 + 15k' \end{cases}$$
   $$\iff \exists (k,k') \in \mathbb{Z}^2 \,\text{tel que}\, \begin{cases} x = 6 + 17k \\ 6 + 17k = 4 + 15k' \end{cases}$$

   Or $6 + 17k = 4 + 15k' \Longleftrightarrow 15k' - 17k = 2$.

   Pour déterminer une solution particulière x_0 de (S), il suffit donc de trouver une solution particulière (k_0, k_0') de l'équation $15k' - 17k = 2$.

   $>$ Pour cela, cherchons d'abord, une solution de l'équation $15u + 17v = 1$.
   17 et 15 sont premiers entre eux.
   Déterminons alors un couple (u_0, v_0) d'entiers relatifs tel que $15u_0 + 17v_0 = 1$.
   On a : $17 = 15 \times 1 + 2$ puis $15 = 7 \times 2 + 1$.
   Alors $1 = 15 - 7 \times 2 = 15 - 7 \times (17 - 15 \times 1) = 15 - 17 \times 7 + 15 \times 7 = 15 \times 8 - 17 \times 7$
   Donc $8 \times 15 + (-7) \times 17 = 1$

   $>$ Ainsi, $16 \times 15 + (-14) \times 17 = 2$.

   Conclusion : On peut prendre alors $k_0' = 16$ et $k_0 = 14$.
   Ainsi, $x_0 = 6 + 17 \times k_0 = 6 + 17 \times 14 = 244$ est une solution particulière de (S).

   Deuxième méthode :

   En observant le système (S), on peut remarquer que $x_0 = -11$ est une solution particulière.
   Cette méthode est évidemment plus rapide mais ne fonctionne pas toujours.

   (b) Comme x_0 solution particulière de (S) donc $\begin{cases} x_0 = 6 \; [17] \\ x_0 = 4 \; [15] \end{cases}$.

   On en déduit que x solution de (S) si et seulement si $\begin{cases} x - x_0 = 0 \; [17] \\ x - x_0 = 0 \; [15] \end{cases}$
   c'est-à-dire x solution de $(S) \Longleftrightarrow (17|x - x_0 \,\text{et}\, 15|x - x_0)$.
   Or $17 \wedge 15 = 1$ donc d'après 2., x solution de (S) $\Longleftrightarrow (17 \times 15)|x - x_0$.
   Donc l'ensemble des solutions de (S) est $\{x_0 + 17 \times 15k, \, k \in \mathbb{Z}\} = \{244 + 255k, \, k \in \mathbb{Z}\}$.

Solution de l'exercice 3 (Énoncé) Correction officielle de la banque CCP. (mise en forme)

1. On a $z^k - 1 = e^{\mathrm{i}\frac{k2\pi}{n}} - 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}\, 2\mathrm{i}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

   c'est-à-dire $z^k - 1 = 2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{2}\right)}$

   Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a $0 < \frac{k\pi}{n} < \pi$, donc $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) > 0$.

   Conclusion : le module de $z^k - 1$ est $2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ et un argument de $z^k - 1$ est $\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2}$.

2. On remarque que pour $k = 0$, $|z^k - 1| = 0$ et $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 0$.

   Donc d'après la question précédente, on a $S = 2\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

   Ainsi S est la partie imaginaire de $T = 2\sum_{k=0}^{n-1} e^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}$.

   Comme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}} \neq 1$, on a (Somme Géo)

$$T = 2\sum_{k=0}^{n-1} e^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}} = 2\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{1-e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}} = \frac{4}{1-e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}}$$

   Or $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}}\right) = -2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}}\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.

   On en déduit que $T = \frac{4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}}}{-2\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2n}} = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{2n}}\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}} = \frac{2i}{\sin\frac{\pi}{2n}}\left(\cos\frac{\pi}{2n} - i\sin\frac{\pi}{2n}\right)$

   En isolant la partie imaginaire de T, et comme $\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) \neq 0$ $(n \geqslant 2)$,

   on en déduit que $S = \frac{2}{\tan\frac{\pi}{2n}}$.