Pour ce devoir vous devez faire 3 exercices parmi les 4.

Mr Nivet doit obligatoirement faire l'exercice 4 qui est très sympa et plutôt délicat

Exercice 1. [Correction] Soit $\omega = \exp\left(i\frac{2\pi}{17}\right)$. On pose $p = \left(1+\omega^2\right)\left(1+\omega^4\right)\left(1+\omega^8\right)$.

1. Sur une dessin (même approximatif) placer le complexe ω.
   Justifier que $\omega \neq 0$, $\omega^2 \neq 1$, exprimer $\overline{\omega}$ sous la forme ω^k.
2. Développer $\left(1+\omega^2\right)\left(1+\omega^4\right)\left(1+\omega^8\right)$.
3. En déduire que : $p = \dfrac{1-\omega^{16}}{1-\omega^2}$ puis (avec Gros-petit) que $p = -\dfrac{1}{\omega(1+\omega)}$ et $\overline{p} = -\dfrac{\omega^2}{(1+\omega)}$.
4. En utilisant $p = -\dfrac{1}{\omega(1+\omega)}$, montrer que : $|p| = \dfrac{1}{2\cos\left(\pi/17\right)}$.
5. Exprimer $\mathrm{Re}(p)$ en fonction de p et $\overline{p}$. En déduire que $\mathrm{Re}(p) = -\dfrac{\cos\left(3\pi/17\right)}{2\cos\left(\pi/17\right)}$.
6. Exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$. En déduire que : $\mathrm{Re}(p) = -\dfrac{1}{2} + 2\sin^2\left(\pi/17\right)$.
7. En déduire l'encadrement suivant : $-\dfrac{1}{2} < \mathrm{Re}(p) < -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi^2}{144}$.

Exercice 2. [Correction] Soit (u_n) une suite de réels non nuls. On lui associe la suite (p_n) définie par

$$\forall n \geqslant 1, \quad p_n = \prod_{k=1}^{n} u_k = u_1 u_2 \dots u_n.$$

On dit que le produit (p_n) converge Ssi la suite (p_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ **ET en plus** $\ell \neq 0$.
Sinon on dit que le produit (p_n) diverge.

1. **Un petit résultat et sa réciproque.**
   (a) En considérant le quotient $\dfrac{p_n}{p_{n-1}}$, montrer que

   $$(\text{ Le produit } (p_n) \text{ converge }) \Rightarrow (\text{ La suite } (u_n) \text{ converge vers } 1)$$

   (b) Étude de la réciproque
   On considère le produit (p_n) défini par

   $$p_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

   i. Calculer p_n.
   ii. La produit (p_n) converge-t-il ? La réciproque de la question 1.a est-elle vraie ?.

2. **Un exemple avec des puissances.** On considère un réel $a > 0$ et que $a \neq 1$.
   On considère le produit (p_n) défini par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + a^{2^k}\right)$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \dfrac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a^2}$
   (b) En discutant selon la valeur de n, déterminer un équivalent de p_n
   et dire si le produit (p_n) converge.

3. **Un exemple avec de la trigo.** On considère un réel $a \in]0, \pi[$.
   On considère le produit (p_n) défini par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos \frac{a}{2^k}$
   On considère la suite (g_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ g_n = p_n . \sin \dfrac{a}{2^n}$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ g_{n+1} = \dfrac{1}{2} g_n$
   (b) En déduire la valeur de p_n.
   (c) Déterminer un équivalent de p_n et dire si le produit (p_n) converge.

4. **Un exemple avec des intégrales.**
   Soient le produit (p_n) et la suite (S_n) définis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $p_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sqrt[k]{k}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$.
   (a) Étudier les variations sur $[3, +\infty[$ de la fonction f définie par $\forall x \geqslant 3,\ f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
   (b) En déduire que : $\forall k \geqslant 3,\ \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x} \, \mathrm{d}x \leqslant \frac{\ln k}{k}$.
   (c) En déduire une minoration de S_n puis que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$
   (d) Exprimer le nombre p_n en fonction du nombre S_n. En déduire la limite de la suite (p_n).

Exercice 3. [Correction] Soit $k \in \mathbb{R}$.

On dit qu'une fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est solution de (E_k)

Ssi f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x > 0,\ f'(x) = kf\left(\frac{1}{x}\right)$

Partie A. Exemple

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note f_λ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f_\lambda : x \longmapsto (\lambda + \ln x)\sqrt{x}$.

1. (a) Justifier que f_λ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et donner une expression de $f'_\lambda(x)$ pour $x > 0$.
   (b) Dresser le tableau de variations de la fonction f_λ.
   (c) Donner une équation cartésienne de la tangente T_λ à la courbe représentative de f_λ en le point d'abscisse 1
   (d) Montrer que les droites T_λ passent toutes par un même point indépendant de λ.
   On dit qu'elles sont concourantes.
   (e) Sur un même graphique, tracer la courbe représentative de f_λ pour $\lambda = -2, \lambda = -3$ et $\lambda = -4$.
   On donne $e^2 \approx 7{,}39$, $\sqrt{e} \approx 1{,}65$.
2. On note (E) l'équation différentielle $y' - \frac{1}{2x}y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ dont on cherche les solutions définies sur $]0,+\infty[$.
   (a) Résoudre l'équation différentielle (E).
   (b) Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y' - \frac{1}{2x}y = \frac{1}{\sqrt{x}} \\ y(1) = \lambda \end{cases}$
3. Montrer que l'on peut choisir λ de telle sorte que
   f_λ est une solution de (E_k) pour une valeur de k que l'on précisera.

Partie B. Résolution lorsque $k = -1/2$

Dans cette partie, on suppose que f est dérivable et $\forall x > 0,\ f'(x) = -\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{x}\right)$

On Considère g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g : x \longmapsto \frac{f(x)}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}f\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que g est une fonction constante sur $]0,+\infty[$.
2. En déduire que, pour tout $x > 0$, on a $f'(x) - \frac{1}{2x}f(x) = \frac{-f(1)}{\sqrt{x}}$.
   Cette équation se résout comme dans l'exemple. ***On ne le fera pas.***

Partie C : Résolution dans le cas $k \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$

Soit k un réel tel que $-\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}$.
On note (F_k) l'équation différentielle suivante dont on cherche les solutions définies sur $]0,+\infty[$:

$$(F_k) \qquad x^2y'' + k^2y = 0$$

1. Déterminer un réel $\alpha > 1/2$ tel que $y : x \mapsto x^\alpha$ soit solution de (F_k).
2. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$.
   On note $z : x \mapsto \frac{y(x)}{x^\alpha}$ de telle sorte que, pour tout $x > 0$, on ait $y(x) = x^\alpha z(x)$.
   Montrer que y est solution de (F_k) si et seulement si z' est solution d'une équation différentielle linéaire (F'_k) d'ordre 1 à déterminer.
3. Résoudre (F'_k).
4. En déduire que les solutions de (E_k) sont les fonctions définies sur $]0,+\infty[$ de la forme $x \longmapsto ax^\alpha + bx^{1-\alpha}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
5. Déterminer les solutions de (E_k) lorsque $k \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.

Exercice 4. [Correction] **Théorème des deux carrés**

On va démontrer que : Si p est un nombre premier congru à 1 modulo 4
Alors il existe $a, b \in \mathbb{N}$ tel que $p = a^2 + b^2$

Kulture/Storie : > *Énoncé pour la première fois sans preuve au* $17^{\text{ème}}$ *siècle,*
ce théorème a été démontré un siècle plus tard par le Suisse Leonhard Euler (1707 - 1783).

> *Par exemple :* $5, 13, 17, 41, 641, 2017$ *sont congru à 1 modulo 4*
et on a : $5 = 1^2+2^2$, $13 = 2^2+3^2$, $17 = 1^2+4^2$, $41 = 4^2+5^2$, $641 = 4^2+25^2$ *et* $2017 = 9^2+44^2$

Notation : Pour tous $r, s \in \mathbb{R}$ *pas nécessairement entiers avec* $r < s$*. On note* $[\![r, s]\!]$*, l'ensemble* $\{k \in \mathbb{Z} \mid r \leqslant k \leqslant s\}$*.*
Ainsi $[\![r, s]\!]$ *sont les entiers de* $\lceil r \rceil$ *à* $\lfloor s \rfloor$*.*

Vocabulaire : Le cardinal d'un ensemble c'est le nombre d'élément de cet ensemble.

1. Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$.
   On suppose que : p est un nombre premier, p divise $a^2 + b^2$, que a et b sont premiers entre eux.
   (a) Montrer que : le cardinal de $[\![0, \sqrt{p}]\!]^2$ est strictement plus grand celui de $[\![0, p-1]\!]$.
   En déduire qu'il existe deux couples distincts (x, y) et (x', y') dans $[\![0, \sqrt{p}]\!]^2$
   tel que les restes de la division euclidienne de $ax + by$ et $ax' + by'$ par p sont égaux.
   (b) En déduire l'existence d'un couple $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ pour lequel $(u, v) \neq (0,0), |u| < \sqrt{p}, |v| < \sqrt{p}$ et p divise $au + bv$.
   (c) Montrer que p divise $a^2u^2 - b^2v^2$, puis que p divise $u^2 + v^2$.
   (d) Justifier que $0 < u^2 + v^2 < 2n$ en déduire que $p = u^2 + v^2$
2. Le théorème de Wilson. Soit $p \in \mathscr{P}$ un nombre premier impair.
   (a) En regardant Bézout modulo [p],
   montrer que pour tout $x \in [\![1, p-1]\!]$, il existe un entier $x^* \in [\![1, p-1]\!]$ pour lequel $x.x^* \equiv 1[p]$.
   Justifier l'unicité de $x^* \in [\![1, p-1]\!]$.
   (b) Soit $x \in [\![1, p-1]\!]$. Montrer que : $x^* = x \iff x = 1$ ou $x = p-1 \equiv (-1) \mod [p]$
   (c) En déduire *le théorème de Wilson*, CàD $(p-1)! \equiv (-1)[p]$.
3. Final
   (a) Soit $p \in \mathscr{P}$ un nombre premier impair. On note $m = \dfrac{p-1}{2} \in \mathbb{N}$.
   En calculant de deux façon le produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{m} k(p-k)$, montrer que $(m!)^2 \equiv (-1)^{m+1}[p]$.
   (b) Soit $p \in \mathscr{P}$ un nombre premier impair et congru à 1 modulo 4
   En déduire qu'il existe $a, b \in \mathbb{N}$ tel que $p = a^2 + b^2$

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. Sur une dessin (même approximatif) placer le complexe ω.Justifier que $\omega \neq 0$, $\omega^2 \neq 1$, exprimer $\overline{\omega}$ sous la forme ω^k
2. Développer $\left(1+\omega^2\right)\left(1+\omega^4\right)\left(1+\omega^8\right)$.

   On trouve $\left(1+\omega^2\right)\left(1+\omega^4\right)\left(1+\omega^8\right) = \cdots = 1+\omega^2+\omega^4+\cdots+\omega^{14}$
3. En déduire que : $p = \dfrac{1-\omega^{16}}{1-\omega^2}$ puis que $p = -\dfrac{1}{\omega(1+\omega)}$ et $\overline{p} = -\dfrac{\omega^2}{(1+\omega)}$.

   $$\begin{aligned}\text{On a } p &= \left(1+\omega^2\right)\left(1+\omega^4\right)\left(1+\omega^8\right)\\ &= 1+\omega^2+\omega^4+\cdots+\omega^{14} = \frac{1-\omega^{16}}{1-\omega^2 \neq 1}\end{aligned}$$

   $$\begin{aligned}\text{De plus } \frac{1-\omega^{16}}{1-\omega^2} + \frac{1}{\omega(1+\omega)} &= \frac{\omega\left(1-\omega^{16}\right)+(1-\omega)}{\omega\left(1-\omega^2\right)}\\ &= \frac{\omega-\omega^{17}+1-\omega}{\omega\left(1-\omega^2\right)} = O \quad car\ \omega^{17}=1\end{aligned}$$

   $$\begin{aligned}\text{Et } \overline{p} + \frac{\omega^2}{(1+\omega)} &= \frac{-1}{\overline{\omega}(1+\overline{\omega})} + \frac{\omega^2}{(1+\omega)}\\ &= \frac{-1}{\omega^{16}(1+\omega^{16})} + \frac{\omega^2}{(1+\omega)}\\ &= \frac{-(1+\omega)+\omega^2\omega^{16}(1+\omega^{16})}{\omega^{16}(1+\omega^{16})(1+\omega)}\\ &= \frac{-(1+\omega)+\omega(1+\omega^{16})}{Bas} \quad \text{car } \omega^{18}=\omega\\ &= \frac{-(1+\omega)+\omega+1}{Bas} = O\end{aligned}$$
4. En utilisant $p = -\dfrac{1}{\omega(1+\omega)}$, montrer que : $\left|p\right| = \dfrac{1}{2\cos\left(\pi/17\right)}$.

   $$\text{On a } \left|p\right| = \left|-\frac{1}{\omega(1+\omega)}\right| = \frac{1}{|\omega|\,|1+\omega|} = \frac{1}{1\,|1+\omega|} = \frac{1}{1\left|1+\exp\left(i\frac{2\pi}{17}\right)\right|} = \text{Angle moité} = \cdots = \frac{1}{2\cos\left(\pi/17\right)}$$
5. Exprimer $\mathrm{Re}(p)$ en fonction de p et $\overline{p}$. En déduire que $\mathrm{Re}(p) = -\dfrac{\cos\left(3\pi/17\right)}{2\cos\left(\pi/17\right)}$.

   $$\text{On a } \mathrm{Re}(p) = \frac{p+\overline{p}}{2} = \frac{-1-\omega^3}{2\omega(1+\omega)} = \frac{-1-\exp\left(i\frac{6\pi}{17}\right)}{2\exp\left(i\frac{2\pi}{17}\right)\left[1+\exp\left(i\frac{2\pi}{17}\right)\right]} = \text{Angle moité} = \cdots = -\frac{\cos\left(3\pi/17\right)}{2\cos\left(\pi/17\right)}$$
6. Exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$. En déduire que : $\mathrm{Re}(p) = -\dfrac{1}{2} + 2\sin^2\left(\pi/17\right)$.

   On a $\cos(3\theta) = \cdots = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

   $$\begin{aligned}\text{Ainsi } \mathrm{Re}(p) = -\frac{\cos\left(3\pi/17\right)}{2\cos\left(\pi/17\right)} &= \ominus\frac{4\cos^3\left(\pi/17\right)-3\cos\left(\pi/17\right)}{2\cos\left(\pi/17\right)}\\ &= -2\cos^2\left(\pi/17\right)+3/2\\ &= -2\left(1-\sin^2\left(\pi/17\right)\right)+3/2\\ &= -\frac{1}{2}+2\sin^2\left(\pi/17\right)\end{aligned}$$
7. En déduire l'encadrement suivant : $-\dfrac{1}{2} < \mathrm{Re}(p) < -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi^2}{144}$.

   On a facilement $\mathrm{Re}(p) = -\dfrac{1}{2} + 2\sin^2\left(\pi/17\right) > \dfrac{-1}{2}$

   De plus, par convexité, on a $\forall x \in \left[0, \pi/2\right]$, $0 \leqslant sin(x) \leqslant x$, ainsi $0 \leqslant sin^2(x) \leqslant x^2$

   $$\text{Ainsi on a } \mathrm{Re}(p) = -\frac{1}{2} + 2\sin^2\left(\pi/17\right) < \frac{-1}{2} \leqslant \frac{-1}{2} + 2\frac{\pi^2}{17^2} \leqslant -\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{\pi^2}{144}}_{\approx 0{,}0218} \quad \text{car } \frac{2}{17^2} = \frac{2}{289} \leqslant \frac{2}{288} = \frac{21}{144}$$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. On suppose que $p_n \underset{n\to+\infty}{\to} \ell \neq 0$

$$\boxed{\text{On veut montrer que } u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1}$$

On a $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} = u_{n+1}$

Ainsi $u_n = \dfrac{p_n}{p_{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ell}{\ell}_{\text{car } \ell\neq 0} = 1.$

2. On considère le produit $p_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

(a) On a facilement $p_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)$

$$= \frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\ldots\times\frac{(n+1)}{n} = n+1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

(b) La réciproque est fausse car cet exemple est un contre exemple,

CàD $u_n = 1+\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et la suite (p_n) ne converge pas vers $\ell \neq 0$

3. Soit (p_n) le produit défini par

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ p_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+a^{2^k}\right) \quad \text{avec } a\in\,]0,+\infty[.$$

(a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ p_n = \dfrac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a^2}$

On fait par récurrence $H_{<n>} : p_n = \dfrac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a^2}$

Initialisation avec $n=1$

On a facilement $p_1 = 1+a^2$ et $\dfrac{1-a^{2^2}}{1-a^2}\dfrac{1-a^4}{1-a^2} = \dfrac{(1-a^2)(1+a^2)}{1-a^2} = 1+a^2$

Donc $H_{<1>}$ est vraie

Hérédité : On suppose $H_{<n>}$

$$\boxed{\text{On veut montrer } H\langle n+1\rangle\text{, CàD } p_{n+1} = \tfrac{1-a^{2^{n+2}}}{1-a^2}}$$

$$\text{On a } p_{n+1} = \prod_{k=1}^{n+1}\left(1+a^{2^k}\right) = p_n\times\left(1+a^{2^{n+1}}\right)$$

$$= \frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a^2}\left(1+a^{2^{n+1}}\right)$$

$$= \frac{1^2-\left(a^{2^{n+1}}\right)^2}{1-a^2} = \frac{1-a^{2^{n+2}}}{1-a^2}\ Fini$$

(b) En discutant selon la valeur de n, déterminer un équivalent de p_n et dire si le produit (p_n) converge ?

$$\text{On sait que } \begin{cases} \textit{Si/lorsque } a>1,\ \textit{on a } 1-a^{2^{n+1}} \underset{n\to\infty}{\sim} -a^{n+1} \\ \text{ET} \\ \textit{Si/lorsque } a\in]0,1,\ \textit{on a } 1-a^{2^{n+1}} \underset{n\to\infty}{\sim} 1 \end{cases}$$

Conclusion :

> Si/lorsque $a>1$, on a $p_n = \dfrac{1-a^{2^{n+2}}}{1-a^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{-a^{2^{n+2}}}{1-a^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car $1-a<0$

Ainsi le produit (p_n) ne converge pas.

> Si/lorsque $a\in]0,1$, on a $p_n = \dfrac{1-a^{2^{n+2}}}{1-a^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{1-a^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1-a^2} \neq 0$

Ainsi le produit (p_n) converge vers $\dfrac{1}{1-a^2} \neq 0$.

4. **Un exemple avec de la trigo.** On considère un réel $a\in\,]0,\pi[$.

On considère le produit (p_n) défini par : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ p_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{a}{2^k}$

On considère la suite (g_n) définie par $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ g_n = p_n.\sin\dfrac{a}{2^n}$.

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ g_{n+1} = \frac{1}{2} g_n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $g_{n+1} = p_{n+1}.\sin\frac{a}{2^{n+1}}$

$$= p_n\left(\cos\frac{a}{2^{n+1}}\right)\sin\frac{a}{2^{n+1}}$$

Or on sait que $\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right]$

Ainsi on a $\cos\frac{a}{2^{n+1}}\sin\frac{a}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left[\sin\frac{a}{2^n} - \sin 0\right] = \frac{1}{2}\sin\frac{a}{2^n}$

$$= \frac{1}{2}p_n.\sin\frac{a}{2^n} = \frac{1}{2}g_n$$

(b) En déduire la valeur de p_n.

Pour tout $n \in, \mathbb{N}^*$, on a maintenant $g_n = \frac{1}{2}g_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} g_1$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cos\frac{a}{2}\sin\frac{a}{2}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\sin a$$

Conclusion : $p_n = \dfrac{\sin a}{2^n \sin\frac{a}{2^n}}$

(c) Déterminer un équivalent de p_n et dire si le produit (p_n) converge.

On a

$$p_n = \frac{\sin a}{2^n\sin\frac{a}{2^n}} = \frac{\sin a}{2^n\sin\frac{a}{2^n}} \underset{n\to\infty}{=} \frac{\sin a}{2^n\left[\frac{a}{2^n} + o\left(\frac{1}{2^n}\right)\right]}$$

$$= \frac{\sin a}{2^n\frac{a}{2^n}\left[1+o(1)\right]} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\sin(a)}{a}$$

Ainsi le produit (p_n) converge vers $\dfrac{\sin(a)}{a} \neq 0$

5. **Un exemple avec des intégrales.**

Soient le produit (p_n) et la suite (S_n) définis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $p_n = \prod_{k=1}^{n}\sqrt[k]{k}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k}$.

(a) La fonction f définie est décroissante sur $[3, +\infty[$

(b) On suppose que $k \geqslant 3$

> Pour $\in [k, k+1]$, on a $\frac{\ln x}{x} = f(x) \leqslant f(k)$ car la fonction f est décroissante sur $[k, k+1]$, ici $k \geqslant 3$

$$\leqslant \frac{\ln k}{k}$$

> On intègre l'inégalité sur $[k, k+1]$

Ainsi $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1}\frac{\ln k}{k}dt = base \times hauteur$
$= \frac{\ln k}{k}$

(c) On somme l'inégalité précédente de $k = 3$ à $k = n$

$$\text{Ainsi } \sum_{k=3}^{n}\frac{\ln k}{k} \geqslant \sum_{k=3}^{n}\int_k^{k+1}\frac{\ln k}{k}dt$$

$$\geqslant \int_3^{n+1}\frac{\ln k}{k}dt$$

$$\geqslant \left[\frac{1}{2}\ln^2(k)\right]_3^{n+1}$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\ln^2(n+1) - \frac{1}{2}\ln^2(3)$$

$$\geqslant Konstante + \frac{1}{2}\ln^2(n+1)$$

Ainsi $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k} \geqslant \underbrace{0}_{k=1} + \underbrace{\frac{\ln(2)}{2}}_{k=2} + K + \frac{1}{2}\ln^2(n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, on a bien $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

(d) Pour $n î n\mathbb{N}^*$, on a $p_n = \prod_{k=1}^{n} \sqrt[k]{k} = \prod_{k=1}^{n} (k)^{\frac{1}{k}} = \prod_{k=1}^{n} e^{k \ln k} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} k \ln k\right) = e^{S_n}$

Ainsi $p_n = e^{S_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

Partie A. Exemple

1. (a) Justifier que f_λ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et donner une expression de $f'_\lambda(x)$ pour $x>0$.

   $>$ La fonction f_λ est fabriquée avec les fonctions usuelles et les opérations classiques

   Donc la fonction f_λ est est dérivable sur $]0,+\infty[$

   $$> \forall x>0,\ f'_\lambda(x) = \frac{1}{x}\sqrt{x} + (\lambda+\ln(x))\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
   $$= \frac{1}{\sqrt{x}} + (\lambda+\ln(x))\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2+\lambda+\ln(x)}{2\sqrt{x}}$$

   (b) Dresser le tableau de variations de la fonction f_λ.

   On a $f'_\lambda(x)\geqslant 0 \iff 2+\lambda+\ln(x)\geqslant 0 \iff x\geqslant e^{-2-\lambda}$. D'où le tableau

x	0		$e^{-2-\lambda}$	$e^{-\lambda}$		$+\infty$
$f(x)$	‖ 0	$\searrow$		0	$\nearrow$	$+\infty$

   (c) Donner une équation de la tangente T_λ à la courbe représentative de f_λ en le point d'abscisse 1

   L'équation est : $y = f(1)+f'(1)(x-1) = \lambda + \dfrac{2+\lambda}{2}(x-1) = \lambda\left[1+\dfrac{x}{2}\right]+(x-1)$

   Montrer que les droites T_λ passent toutes par un même point indépendant de λ. *On dit qu'elles sont concourantes.*

   L'équation de T_λ est : $y = \lambda + \dfrac{2+\lambda}{2}(x-1) = \lambda\left[1+\dfrac{x-1}{2}\right]+(x-1)$

   Donc lorsque $x=-1$, on a forcément $y=-2$

   Conclusion : les droites T_λ passent toutes par le point $\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$

   (d) Sur un même graphique, tracer la courbe représentative de f_λ pour $\lambda=-2, \lambda=-3$ et $\lambda=-4$.

2. On note (E) l'équation différentielle $y' - \dfrac{1}{2x}y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ dont on cherche les solutions définies sur $]0,+\infty[$.

   (a) Résoudre l'équation différentielle (E).

   C'est une EDL1 complète

   Les solutions h de l'équation différentielle homogène, sur $]0,+\infty[$, sont : $\forall x>0,\ h(x) = K\sqrt{x}$

   Une solution particulière y_p de l'équation différentielle complète, sur $]0,+\infty[$, est : $\forall x>0,\ y_p(x) = \ln(x).\sqrt{x}$

   Conclusion : les solutions sont : $\forall x>0,\ y(x) = \ln(x).\sqrt{x} + K\sqrt{x}$

   (b) Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y' - \frac{1}{2x}y = \frac{1}{\sqrt{x}} \\ y(1) = \lambda \end{cases}$

   L'unique solution est la fonction f_λ

3. Montrer que l'on peut choisir λ de telle sorte que
   f_λ est une solution de (E_k) pour une valeur de k que l'on précisera.

   On a

$$\forall x>0,\ f'_\lambda\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2+\lambda+\ln\left({}^1/_x\right)}{2\sqrt{{}^1/_x}}$$
$$= \frac{2+\lambda-\ln(x)}{2}\sqrt{x}$$
$$= \frac{-1}{2}(-2-\lambda+\ln(x))\sqrt{x} = k(\lambda+\ln x)\sqrt{x}$$

   Cette égalité est vraie pour tout $x>0$ Ssi $\begin{cases} -2-\lambda=\lambda \iff \lambda=-1 \\ et \\ k = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$

Partie B. Résolution lorsque $k = -1/2$

Dans cette partie, on suppose que f est dérivable et $\forall x > 0,\ f'(x) = -\frac{1}{2} f\left(\frac{1}{x}\right)$

On Considère g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g : x \longmapsto \frac{f(x)}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} f\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que g est une fonction constante.

   g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

   $$\forall x > 0,\ g'(x) = \cdots = 0$$

   Donc g est constante sur l'intervalle $]0,+\infty[$

   Et $\forall x \in]0,+\infty[,\ \frac{f(x)}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} f\left(\frac{1}{x}\right) = g(x) = g(1) = 2f(1)$

2. En déduire que, pour tout $x > 0$, on a $f'(x) - \frac{1}{2x} f(x) = \frac{-f(1)}{\sqrt{x}}$

   Comme pour tout $x > 0$, on a $f'(x) = -\frac{1}{2} f\left(\frac{1}{x}\right)$,

   $$\textit{Ainsi } \forall x \in]0,+\infty[,\ \frac{f(x)}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\left[-2f'(x)\right] = 2f(1)$$
   $$\implies f'(x) - \frac{1}{2x} f(x) = \frac{-f(1)}{\sqrt{x}}$$

Partie C : Résolution dans le cas $k \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$

Soit k un réel tel que $-\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}$.

On note (F_k) l'équation différentielle suivante dont on cherche les solutions définies sur $]0,+\infty[$:

$$(F_k) \qquad x^2 y'' + k^2 y = 0$$

1. Déterminer un réel $\alpha > 1/2$ tel que $y : x \mapsto x^\alpha$ soit solution de (E_k).

   On a : $\forall x > 0,\ y'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ et $y''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$

   $$\text{Ainsi } x^2 y''(x) + k^2 x^\alpha = \alpha(\alpha-1)x^\alpha + k^2 x^\alpha = x^\alpha\left[\alpha(\alpha-1) + k^2\right] = 0$$

   On a choisit $\alpha^2 - \alpha + k^2 = 0$ et $\alpha > 1/2$,

   $$\text{Donc } \alpha = \frac{1+\sqrt{1-4k^2}}{2} > \frac{1+0}{2} \text{ convient comme } -\tfrac{1}{2} < k < \tfrac{1}{2},\ \Delta = 1-4k^2 \geqslant 0$$

2. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$.

   On note $z : x \mapsto \frac{y(x)}{x^\alpha}$ de telle sorte que, pour tout $x > 0$, on ait $y(x) = x^\alpha z(x)$.

   Montrer que y est solution de (F_k) si et seulement si z' est solution d'une équation différentielle linéaire (F_k') d'ordre 1 à déterminer.

   On a sur $]0,+\infty[,\ y(x) = x^\alpha z(x)$

   $$y'(x) = \alpha x^{\alpha-1} z(x) + x^\alpha z'(x)$$
   $$y''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} z(x) + 2\alpha x^{\alpha-1} z'(x) + x^\alpha z''(x)$$

   $$\textit{Ainsi sur }]0,+\infty[,\ x^2 y'' + k^2 y = 0 \iff x^2\left[\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} z(x) + \right.$$
   $$\left. + 2\alpha x^{\alpha-1} z'(x) + x^\alpha z''(x)\right] + k^2 x^\alpha z(x) = 0$$
   $$\iff x^\alpha z(x)\left[\underbrace{\alpha^2 - \alpha + k^2}_{=0}\right] + x^\alpha z''(x) + 2\alpha x^{\alpha-1} z'(x) = 0$$
   $$\iff z''(x) + 2\alpha x^{-1} z'(x) = 0 \qquad \textit{car } x > 0$$

   Donc z' est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle $(F_k') \quad f' + \frac{2\alpha}{x} f = 0$

3. Résoudre (F_k').

L'équation différentielle (F_k') $\quad f' + \dfrac{2\alpha}{x} f = 0$ est une EDL1 homogène (et normaliser)

Comme $2\alpha \ln|x|$ est une primitive de $\dfrac{2\alpha}{x}$, on sait que

$$\forall x > 0,\ f'(x) = K\, e^{-2\alpha \ln|x|} = \frac{K}{x^{2\alpha}}$$

4. En déduire que les solutions de (F_k) sont les fonctions définies sur $]0,+\infty[$ de la forme $x \longmapsto ax^{\alpha} + bx^{1-\alpha}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Comme z' est solution de (F_k'), on a $\forall x > 0,\ z'(x) = K\, e^{-2\alpha \ln|x|} = K\, x^{-2\alpha}\, \dfrac{K}{x^{2\alpha}}$

On primitive, ainsi $\forall x > 0,\ z(x) = K\, \dfrac{x^{-2\alpha+1}}{-2\alpha+1} + C$

Conclusion : $\forall x > 0,\ y(x) = x^{\alpha} z(x) = K\, \dfrac{x^{-\alpha+1}}{-2\alpha+1} + Cx^{\alpha} = ax^{\alpha} + bx^{1-\alpha}$

avec $a = \dfrac{K}{-2\alpha+1}$ et $b = C$

5. Déterminer les solutions de $(\ E_k\ )$ lorsque $k \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

Analyse.

Si/lorsque f est solution de $(\ E_k\ )$, on a $\forall x > 0,\ f'(x) = kf\left(\dfrac{1}{x}\right)$

On dérive ainsi $f''(x) = k\dfrac{-1}{x^2} f'\left(\dfrac{1}{x}\right) = k\dfrac{-1}{x^2} k f(x)$

Donc f est solution de (F_k) et $\forall x > 0,\ f(x) = a\,x^{\alpha} + bx^{1-\alpha}$

Synthèse.

Sur $]0,+\infty[$, on a

$$f'(x) = a\alpha\, x^{\alpha-1} + b(1-\alpha)x^{-\alpha} \text{ et } kf\left(\frac{1}{x}\right) = k\,a\,x^{-\alpha} + k\,bx^{\alpha-1}$$

Il y a égalité Ssi $a\alpha = kb$ et $b(1-\alpha) = ka$.

De plus comme $\alpha^2 - \alpha + k^2 = 0$, on $a\alpha = kb \iff b(1-\alpha) = ka$ Donc $a = \dfrac{kb}{\alpha}$

Conclusion : Les solutions de (E_k) sont les fonctions :

$$\forall x > 0,\ f(x) = \frac{kb}{\alpha} x^{\alpha} + bx^{1-\alpha} = b\left[\frac{k}{\alpha} x^{\alpha} + x^{1-\alpha}\right] \text{ avec } \alpha^2 - \alpha + k^2 = 0 \text{ et } \alpha > 1/2$$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

1. Soient $n, a, b \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Comparer le cardinal de $[\![0, \sqrt{p}]\!]^2$ et celui de $[\![0, p-1]\!]$.

Comme $\sqrt{p}$ n'est pas un entier, $card\left([\![0, \sqrt{p}]\!]\right) = \lfloor\sqrt{p}\rfloor + 1$

donc $card\left([\![0, \sqrt{p}]\!]^2\right) = \left(\lfloor\sqrt{p}\rfloor + 1\right)^2 \underset{Stric}{>} \left(\sqrt{p}\right)^2 = p$

Donc $card\left([\![0, \sqrt{p}]\!]^2\right) \underset{Stric}{>} p = card\left([\![0, p-1]\!]\right)$

En déduire qu'il existe deux couples distincts (x, y) et (x', y') dans $[\![0, \sqrt{p}]\!]^2$ tel que les restes de la division euclidienne de $ax + by$ et $ax' + by'$ par p sont égaux.

Chaque coupe (x, y) fournit un reste dans $[\![0, p-1]\!]$.
Il y a plus de couple que de possibilité de reste

Donc forcément 2 couples distincts on le même reste modulo [p].

   (b) En déduire l'existence d'un couple $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ pour lequel $(u, v) \neq (0, 0), |u| < \sqrt{p}, |v| < \sqrt{p}$ et p divise $au + bv$.

Il existe $(x, y) \neq (x', y') \in [\![0, \sqrt{p}]\!]^2$ tel que $\left(ax + by\right) \equiv \left(ax' + by'\right) \mod [n]$

Ainsi on a $a\underbrace{(x - x')}_{=u} + b\underbrace{(y - y')}_{=v} \equiv 0 \mod [n]$ et $0 - \sqrt{p} < x - x' < \sqrt{p} - 0$

   (c) Montrer que p divise $a^2u^2 - b^2v^2$, puis que p divise $u^2 + v^2$.

$>$ Comme $a^2u^2 - b^2v^2 = (au + bv)(au - bv)$ et p divise $au + bv$
on a bien : p divise $a^2u^2 - b^2v^2$.

$>$ Comme p divise $a^2u^2 - b^2v^2$ et p divise $a^2 + b^2$
Donc p divise $\left[(a^2u^2 - b^2v^2) + v^2(a^2 + b^2)\right] = a^2(u^2 + v^2)$

Or p est premier donc p divise a ou p divise $u^2 + v^2$

Si p ne divise pas $u^2 + v^2$
Alors p divise a
De la même façon on a p divise $\left[-(a^2u^2 - b^2v^2) + u^2(a^2 + b^2)\right] = b^2(u^2 + v^2)$
Donc p divise a
Or a et b sont premiers entre eux donc $p = 1$ OUPS

Conclusion : p divise $u^2 + v^2$

   (d) Justifier que $0 < u^2 + v^2 < 2n$ en déduire que $p = u^2 + v^2$

D'après la question précédente, $u^2 + v^2$ est un multiple de p, non nul car $(u, v) \neq (0, 0)$,
et strictement plus petit que $2n$ puisque $|u|, |v| < \sqrt{p}$.

Or il n'y a qu'un seul multiple de p strictement compris entre 0 et $2p$: c'est p lui-même.

Conclusion : $p = u^2 + v^2$

2. Le théorème de Wilson. Soit $p \in \mathscr{P}$ un nombre premier impair.
   (a) En regardant Bézout modulo [p],
   montrer que pour tout $x \in [\![1, p-1]\!]$, il existe un entier $x^* \in [\![1, p-1]\!]$ pour lequel $x.x^* \equiv 1[p]$.
   Justifier l'unicité de $x^* \in [\![1, p-1]\!]$.
   (b) Soit $x \in [\![1, p-1]\!]$. Montrer que : $x^* = x \iff x = 1$ ou $x = p - 1 \equiv (-1) \mod [p]$
   (c) En déduire *le théorème de Wilson*, CàD $(p-1)! \equiv (-1)[p]$.
3. Final
   (a) Soit $p \in \mathscr{P}$ un nombre premier impair. On note $m = \dfrac{p-1}{2} \in \mathbb{N}$.

En calculant de deux façon le produit $\prod_{k=1}^{m} k(p-k)$, montrer que $(m!)^2 \equiv (-1)^{m+1}[p]$.

$$\prod_{k=1}^{m} k(p-k) \equiv \prod_{k=1}^{m} k(-k)[p]$$
$$\equiv (-1)^m (m!)^2 [p]$$

$$\prod_{k=1}^{m} k(p-k) = \left(\prod_{k=1}^{m} k\right) \cdot \left(\prod_{k=1}^{m} (p-k)\right)$$
$$= 1.2.\ldots \underbrace{\frac{p-1}{2}}_{=m} \times (p-1)(p-2)\ldots \underbrace{(p-m)}_{=\frac{p+1}{2}}$$
$$= (p-1)!$$
$$\equiv (-1)[p]$$

Conclusion : $(-1)^m(m!)^2[p] \equiv (-1)[p] \implies (m!)^2[p] \equiv (-1)^{m+1}[p]$

(b) Soit $p \in \mathscr{P}$ un nombre premier impair et congru à 1 modulo 4

En déduire qu'il existe $a, b \in \mathbb{N}$ tel que $p = a^2 + b^2$

Comme $p \equiv 1[4]$, on a $m = \dfrac{p-1}{2}$ est pair et $m+1$ est impair

Ainsi $(m!)^2[p] \equiv (-1)^{impair}[p] \equiv (-1)[p]$

Donc p divise $(m!)^2 + 1 = (m!)^2 + 1^2$ et $m!$ et 1 sont premiers entre eux

Conclusion : D'après Q1d, on sait qu'il existe $u, v \in \mathbb{N}$ tel que $p = u^2 + v^2$.