TD 15 Page Un.

Jeudi 09 Janvier 2024

Exercice 1. [Correction] On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ A^n = (-1)^n\ I_3 + \dfrac{2^n + (-1)^{n+1}}{3}\ J$

Exercice 2. [Correction] Soit j la célèbre racine cubique de l'unité.
On considère

$$A = \begin{pmatrix} 2 & j & j^2 \\ j & -j & 1 \\ j^2 & 1 & -j^2 \end{pmatrix}$$

1. Donner la définition et le propriétés du nombre complexe j.
2. On considère $N = A - I_3$. Calculer N, N^2 et N^3.
3. En utilisant l'égalité $A = I_3 + N$, calculer A^p.

Exercice 3. [Correction] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0, u_1 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5\, u_{n+1} - 6\, u_n$$

On considère $\overrightarrow{X_n} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. Trouver une matrice A tel que $\overrightarrow{X_{n+1}} = A\overrightarrow{X_n}$.
   En déduire $\overrightarrow{X_n}$ en fonction de A et de $\overrightarrow{X_0}$
2. On va calculer A^n.
   On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
   (a) Justifier que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (b) Calculer la matrice $D = P^{-1}\, A\, P$.
   (c) En déduire une expression de A^n en fonction P et D^n.
   Calculer A^n.
3. Calculer u_n en fonction de n.

Exercice 4. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Trouver α, β, γ tel que $A^3 = \alpha\, A^2 + \beta\, A + \gamma\, I_3$
   En déduire que : la matrice A est inversible et donner A^{-1}.

Exercice 5. [Correction] On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer J^2, J^3 puis J^n puis à l'aide du binôme, calculer A^n. (On trouve $A^n = (-1)^n \ I_3 + \dfrac{2^n - (-1)^n}{3} \ J$.)

Exercice 6. *Un peu de théorie*
Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices $n \times n$

1. Soit $C = A.B = (c_{ij})$. On a donc

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \\ AB = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = C \end{array}$$

   Pour $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, calculer c_{ij}

2. Soit $D = A^T A = (d_{ij})$.
   Calculer d_{11} puis d_{ii} et enfin $tr\left(A^T A\right)$

3. Soit $\overrightarrow{E_i}$ le vecteur colonne $(0, .., 0, 1, 0, ...0)$. *J'ai écrit le vecteur colonne sous forme de liste (gain de place)*
   Déterminer $E_{ij} = \left(\overrightarrow{E_i}\right) . \left(\overrightarrow{E_j}\right)^T$ et calculer $E_{ij}.E_{k\ell}$

Exercice 7. [Correction]

1. On suppose que $a = b\,q + r$.
   Déterminer une matrice M_q tel que : $\begin{pmatrix} b \\ r \end{pmatrix} = M_q \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
2. Version Matricielle de l'algorithme de Euclide
   Calculer $pgcd(1254, 40)$.
   Traduire les divisions Euclidiennes avec les matrices comme ci-dessus.
   En déduire les coefficients de Bézout.

Exercice 8. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

L'objectif est de déterminer les matrices X vérifiant : $X^2 = A$

1. Déterminer les matrices $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ tel que $AM = MA$.
2. Analyse. On suppose que X est une matrice tel que $X^2 = A$
   $>$ Vérifier que : $AX = XA$.
   $>$ En déduire que X est de la forme $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$
3. Synthèse.
   Parmi les matrices X de la $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, trouver celles qui vérifie $X^2 = A$.

Correction.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. Facile par récurrence
2. On a facilement

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3B$$

   Ainsi $J^3 = J^2.J = (3J)\,.J = 3J^3 = 3\,(3J) = 9B$

$$\begin{aligned} \textit{Ainsi on a : } A^3 = (J - I_3)^3 &= \; Bin\hat{o}me \\ &= J^3 - 3\,J^2 + 3\,J - I_3 \\ &= 9\,J - 3\,3J + 3\,J - I_3 = 3\,J - I_3 \end{aligned}$$

3. On démontre par récurrence $\forall\, n \geqslant 1,\; J^n = 3^{n-1}\, I_3$

$$\begin{aligned} \textit{Ainsi on a : } A^n = (J - I_3)^n &= \; Bin\hat{o}me \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k\,(-I)^{n-k} \\ &= J \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1}\,(-1)^{n-k} + \underbrace{(-1)^n\, I}_{k=0} \\ &= J\,\frac{(-1)^n}{3} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\,(-3)^k + \underbrace{(-1)^n\, I}_{k=0} \\ &= J\,\frac{(-1)^n}{3}\,\left[(1-3)^n - 1\,\right] + (-1)^n\, I \\ &= \frac{2^n - (-1)^n}{3}\, J + (-1)^n\, I \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 2 **(Énoncé)**

1. $j = e^{i \cdots}$, $|j| = 1$, $j^3 = 1$, $\overline{j} = j^2$ et $1 + j + j^2 = 0$
2. On a

$$\begin{aligned}
A^p = (I+N)^p &= \textit{On peut utiliser la formule du binôme car c'est de la forme } (1+x)^p \\
&= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} N^k \\
&= \underbrace{1\,N^0}_{k=0} + \underbrace{p\,N^1}_{k=1} + \underbrace{\binom{p}{2} N^2}_{k=2} + \cdots \\
&\quad \textit{Or } N^0 = I_3,\ \textit{et } N^2 = N^3 = .. = \mathcal{O}_3 \\
&\quad \textit{Donc la somme se réduit au 2 premiers plateaux} \\
&= I_3 + p\,N = \begin{pmatrix} 1+p & pj & pj^2 \\ pj & 1+pj^2 & p \\ pj^2 & p & 1+pj \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Comme $A = I + N$ et $N^2 = \mathcal{O}$, on a $(A - I)^2 = A^2 - 2\,A + I = \mathcal{O}$.
Donc on trouve (méthode des polynômes)

$$A^{-1} = 2I - A = \begin{pmatrix} 0 & -j & -j^2 \\ -j & 1-j^2 & - \\ -j^2 & -1 & 1-j \end{pmatrix}$$

Solution de l'exercice 3 **(Énoncé)**

1. On a

$$\overrightarrow{X_{n+1}} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\,u_{n+1} - 6\,u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

Ainsi à la mode géo, on a $\overrightarrow{X_n} = A^n\,\overrightarrow{X_0}$

2. On va calculer A^n.
On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
   (a) Comme $det(P) = 2 - 3 = -1 \neq 0$ donc P est inversible et calculer

$$P^{-1} = \frac{1}{det(P)} \begin{pmatrix} \textit{Donble} \\ \textit{Symétrie} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

   (b) On trouve

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   (c) Comme $D = P^{-1}\,A\,P$, on a $A = P\,D^{-1}$ et $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$.
   (d) Comme $D^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$, on a

$$\begin{aligned}
A^n = P\,D^n\,P^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2\,2^n + 3\,3^n & 6\,2^n - 6\,3^n \\ -2^n + 3^n & 3\,2^n - 2\,3^n \end{pmatrix} \\
&= 2^n \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + 3^n \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \overrightarrow{X_n} = A^n\,\overrightarrow{X_0} = \begin{pmatrix} -2\,2^n + 3\,3^n & 6\,2^n - 6\,3^n \\ -2^n + 3^n & 3\,2^n - 2\,3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

1. Facile par récurrence
2. On a facilement

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3B$$

Ainsi $J^3 = J^2.J = (3J).J = 3J^3 = 3(3J) = 9B$

$$\begin{aligned} \textit{Ainsi on a : } A^3 = (J - I_3)^3 &= \ Bin\hat{o}me \\ &= J^3 - 3\,J^2 + 3\,J - I_3 \\ &= 9\,J - 3\,3J + 3\,J - I_3 = 3\,J - I_3 \end{aligned}$$

3. On démontre par récurrence $\forall\, n \geqslant 1,\ J^n = 3^{n-1}\, I_3$

$$\begin{aligned} \textit{Ainsi on a : } A^n = (J - I_3)^n &= \ Bin\hat{o}me \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k\,(-I)^{n-k} \\ &= J\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1}\,(-1)^{n-k} + \underbrace{(-1)^n\, I}_{k=0} \\ &= J\frac{(-1)^n}{3}\ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\,(-3)^k + \underbrace{(-1)^n\, I}_{k=0} \\ &= J\frac{(-1)^n}{3}\ \left[(1-3)^n - 1\right] + (-1)^n\, I \\ &= \frac{2^n - (-1)^n}{3}\, J + (-1)^n\, I \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 7 (Énoncé)

1. On trouve
$$\begin{pmatrix} b \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

2. Version Matricielle de l'algorithme de Euclide

   $>$ On a les division euclidienne

   $1254 = 40 \times 31 + 14$ et $40 = 14 \times 2 + 12$ et $14 = 12 \times 1 + 2$ et $12 = 2 \times 6 + 0$

   Ainsi $pgcd(1254, 40) = pgcd(40, 14) = pgcd(14, 12) = pgcd(12, 2) = pgcd(2, 0) = 2$

   $>$ De plus on a
$$\begin{pmatrix} 40 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -31 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1254 \\ 40 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 14 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 40 \\ 14 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14 \\ 12 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   $>$ En déduire les coefficient de Bézout.

   On a $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \underset{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} \underset{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & -20 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}} \underset{\begin{pmatrix} 3 & -94 \\ -20 & 627 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -31 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1254 \\ 40 \end{pmatrix}$

   Ainsi $pgcd(1254, 40) = 2 = 3 \times 1254 + (-94) \times 40$