Les Matrices comme en terminale

Les vidéos de mon collègue du lycée La Martinière sont great.

> https ://mpsilamartin.github.io/maths/cours/MAT.html

> Les vidéos *Matrices élémentaires et Opérations élémentaires* sont plus difficiles et non indispensables pour une première (ou deuxième) "lecture"

1 Les matrices carrées.

1.1 Matrices, matrices nulles et matrices identités

Définition 1. Matrices classiques.

Les matrices carrées

Une matrice carrée de taille n est une matrice de taille $n \times n$.
L'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Matrices nulles

La matrice nulle de taille $n \times p$ est uniquement constituée de coefficient nulle.
On la note $\mathcal{O}_{n,p}$ ou $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}_{n,n}$

Matrices identités

La matrice identité de taille n est la matrice carrée de taille n avec des 1 sur la diagonale et 0 partout ailleurs.
On la note I_n

Exemples

$$\mathcal{O}_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{O}_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{O}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème 2. Correspondance "naturelle"

$Nulle \longleftrightarrow Zéro$ est absorbant et $identité \longleftrightarrow 1$ est neutre, CàD

$$A.\mathcal{O} = \mathcal{O} \qquad A.I_n = A \qquad I_n^2 = I_n.I_n = I_n$$
$$\mathcal{O}.A = \mathcal{O} \qquad I_n.A = A$$

1.2 Opérations.

Théorème 3. Opérations, formulaires, Pièges.

Avec des matrices carrées $A, B, \ldots$

Opérations.

> des additions/CL/produit, CàD

$$(2A-3B) \text{ et } AB \text{ se calculent} \text{ et sont des matrices carrées.}$$

> des puissances, CàD $A^2 = A.A,\ A^3 = A.A.A$ se calculent et sont des matrices carrées.

> "Convention" : $A^0 = I_n$

> des polynômes. On considère le polynôme $P(X) = 3X^4 - 2X + 5 = 3X^4 - 2X + 5X^0$ et A une matrice carrée

On a alors $P(A) = 3A^4 - 2A + 5I_n$ a du sens et c'est matrice carrée

On notera que $A^0 = I_n \neq 1$

Formulaire sur les polynômes de matrice

> On peut : factoriser/développer/regrouper.

$$\text{CàD} \quad (A-2I_n)(A-3I_n) = A^2 - 3\underbrace{I_n.A}_{=A} - 2\underbrace{A.I_n}_{=A} + 6\underbrace{I_n^2}_{=I_n}$$
$$= A^2 - 5A + 6I_n$$

> Binôme. On a

$$(I_n+A)^p = \sum_{k=0}^{p} \underbrace{\binom{p}{k} A^k}_{n^\circ k} = \underbrace{I_n}_{k=0} + \underbrace{pA}_{k=1} + \underbrace{\binom{p}{2} A^2}_{k=2} + \cdots + \underbrace{\binom{p}{p} A^p}_{k=p}$$

Les pièges classiques.

Non commutatif

CàD En général $AB \neq BA \iff AB - BA \neq 0$

> $(A+B)(A-B) = A^2 \underbrace{-AB+BA}_{\neq 0} - B^2 \neq A^2 - B^2$

> $(A+B)^2 = (A+B).(A+B)$
$= A^2 + \underbrace{AB+BA}_{\neq 2AB} + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

Non intègre

CàD en général $AB = 0 \quad \not\Longrightarrow \quad A = 0 \ ou\ B = 0$

Non simplifiable.

CàD $A \neq 0$ et $A\overrightarrow{U} = 0 \quad \not\Longrightarrow \quad \overrightarrow{U} = 0$.
CàD $A \neq 0$ et $A\overrightarrow{U} = A\overrightarrow{V} \quad \not\Longrightarrow \quad \overrightarrow{U} = \overrightarrow{V}$.
CàD $A \neq 0$ et $AB = AC \quad \not\Longrightarrow \quad B = C$.

2 Nouveautés 1

2.1 Transposition.

Définition 4. Transposition

On considère une matrice A rectangulaire ou carrée.
La transposée de A, notée ${}^{T}A$ ou A^T est la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\vphantom{\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}}} & \boxed{\vphantom{\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}}} & \cdots & \boxed{\vphantom{\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}}} \end{pmatrix} \text{ alors } {}^{T}A = A^T = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \\ \vdots \\ \boxed{} \end{pmatrix}$$

Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \text{ alors } {}^{T}A = A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ alors } {}^{T}A = A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ alors } {}^{T}A = A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = A$$

Théorème 5. Formulaire sur la transposition.

Soit A une matrice de taille $n \times p$.
On a

> $\left(A^T\right)^T = A$
>
> $\left(\lambda A + \mu B\right)^T = \lambda A^T + \mu B^T$
>
> $(AB)^T = Contravariant = B^T A^T$
>
> $\left(P^{-1}\right)^T = \left(P^T\right)^{-1}$

Vocabulaire - Lorsque $A^T = A$, on dit que la matrice A est symétrique.
- Lorsque $A^T = -A$, on dit que la matrice A est anti-symétrique.

2.2 Trace

Définition 6. Trace

On considère une matrice A carrée $n \times n$. On la note

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La trace de A, notée $tr(A)$, est La somme des éléments sur LA diagonale de A.

On a donc $tr(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn} = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$.

Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ alors } \quad tr\,(A) = 1+2+3 = 6$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ alors } \quad tr\,(A) =$$

Théorème 7. Formulaire sur la trace.

Soit A une matrice carrée $n \times n$.

On a :

$tr\,(A) =$ C'est un nombre et

$$tr\left(\lambda A + \mu B\right) = \lambda\, tr(A) + \mu\, tr(B)$$

$$tr\left(A^T\right) = tr(A)$$

$$tr\,(AB) = \text{Rien}$$

$$tr\left(P^{-1}\right) = \text{Rien}$$

3 Matrices inversibles

3.1 Déterminant.

Définition 8. Déterminant 2×2 - 3×3

Déterminant 2×2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice

le déterminant de A, noté $\det(A)$, est le nombre défini par

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Déterminant 3×3

En classe, j'expliquerai comment calculer un déterminant 3×3.
C'est plutôt technique.

Exemples : $\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 1.4 - 2.3 = -2 \quad et \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} = 1.(-8) - 2.4 = 0$

Théorème 9.

Les déterminants classiques.

> $\det(\mathcal{O}_n) = 0$ et $\det(I_n) = 1$

> $\det(Diagonale)$ = le produit des éléments diagonaux.

> $\det(Triangulaire)$ = le produit des éléments diagonaux.

Propriétés importantes du déterminant Soit A, B, P des matrices carrées de taille n.

> $\det(AB) = \det(A).\det(B)$.

> Lorsque $\det(P) \neq 0$ alors la matrice P est inversible et $\det(P^{-1}) = \dfrac{1}{det(P)}$

3.2 Définition et propriétés

Définition 10. Matrice inversible.

Soit A une matrice carrée de taille n.

On dit que la matrice A est inversible Ssi il existe une matrice carrée B telle que

$$AB = I_n \quad et \quad BA = I_n$$

La matrice B est unique, on l'appelle l'inverse de A et la note A^{-1}

`Attention : Une matrice rectangulaire n'est jamais inversible.`

Théorème 11.

Un critère plus simple. Soit A, B deux matrices

$$\left.\begin{array}{r} A \text{ est une matrice carrée} \\ AB = I_n \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \text{la matrice A est inversible} \\ \quad \text{et } A^{-1} = B \\ \quad \text{On a donc forcément } BA = I_n \\ \quad \text{Inutile de le vérifier} \end{array}$$

Avec les matrices inversibles, c'est plus simple.

$$\left.\begin{array}{c} A\overrightarrow{U} = \overrightarrow{0} \\ \text{La matrice A est inversible} \end{array}\right\} \Longrightarrow \overrightarrow{U} = A^{-1}\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$$

$$\left.\begin{array}{c} AB = AC \\ \text{La matrice A est inversible} \end{array}\right\} \Longrightarrow B = A^{-1}.AC = C$$

3.3 Inversible et déterminant

Théorème 12. Inversibilité des matrices 2×2

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

> $\det(A) = ad - bc = 0$ Ssi la matrice A est NON-inversible.

> $\det(A) = ad - bc \neq 0$ Ssi la matrice A est inversible

et BONUS on a $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

Exemple

Comme $\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 1.4 - 2.3 = -2 \neq 0$ la matrice est inversible et on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème 13. Inversibilité et déterminant

Soit la matrice A carrée de taille $n \geqslant 3$

> On a $\det(A) = 0$ Ssi la matrice A est NON-inversible.

> On a $\det(A \neq 0$ Ssi la matrice A est inversible
et donc la matrice A^{-1} existe mais il n'y pas d'expression simple A^{-1}.

3.4 Comment calculer A^{-1}

Il y a 3 méthodes principales.

> Méthode avec les polynômes de matrice.

> Méthode avec les matrices nilpotentes.

> Méthode avec les systèmes.

4 Nouveautés 2

4.1 Les matrices nilpotentes

Définition 14. Définition de nilpotente

Soit N une matrice carrée $n \times n$.

On dit que la matrice N est nilpotente d'ordre 3 Ssi $N^3 = \mathcal{O}_n$

`Attention : pour les matrices` $N^3 = \mathcal{O} \not\Rightarrow N = \mathcal{O}$

Théorème 15. Calcul avec les matrices nilpotentes.

Soit N une matrice nilpotente d'ordre 3 donc $N^3 = \mathcal{O}$.

On considère $A = I + N$

Alors on a

> On sait calculer A^p.

> La matrice A est inversible et on sait calculer A^{-1}

4.2 Les matrices semblables

Définition 16. Définition de semblables

Soit A et A' deux matrices carrée.

On dit que la matrice A est semblable à la matrice A'

Ssi il existe une matrice inversible P tel que $A = PA'P^{-1}$.

Théorème 17. Calcul avec les matrices semblables

On considère A, A' des matrices carrées.

On suppose que A est semblable à A'

donc il existe une matrice inversible P tel que $A = PA'P^{-1}$.

On a alors

$$A^p = A.A..A = (PA'P^{-1}).(PA'P^{-1})...(PA'P^{-1}) = P(A')^pP^{-1}$$

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det(PA'P^{-1})\\ &= \det(P)\det(A')\det(P^{-1})\\ &= \det(P)\det(A')\frac{1}{\det(P)} = \det(A')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}tr(A) &= tr(PA'P^{-1})\\ &= tr(A'P^{-1}P)\\ &= tr(A'I_n) = tr(A)\end{aligned}$$

5 Matrices élémentaires (uniquement en vidéo).

6 Exercices.

Produit

Exercice 1. Soit les matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&0&-4\\1&1&2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&1&-3\\-1&3&1\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1&1\\0&4\\2&5\end{pmatrix}\text{ et } D=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$$

Calculer $A.B$ et $A.C$ et $D.B$

Exercice 2.

1. Considérons les matrices $C=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $L=(4\ 5\ 6)\in\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$
   Calculer LC, CL.
2. On considère les matrices
   $$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\text{ et } B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\\1&1\end{pmatrix}$$
   Calculer $A.B$ et $B.A$

Exercice 3. [Correction] Pour tout réel t, on définit la matrice $A_t=A(t)\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par :

$$A_t=A(t)=\begin{pmatrix}1-t&-t&0\\-t&1-t&0\\-t&t&1-2t\end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{M}=\{A(t),\ t\in\mathbb{R}\}$

1. Montrer que : $A_t\in\mathcal{M}$
   $\iff M=$ Combinaison linéaire sur des matrices fixes.
2. En utilisant la combinaison linéaire précédente,
   montrer que $\mathcal{M}$ est stable par produit.

Exercice 4. [Correction] On considère $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices de la forme .

$$\begin{pmatrix}a+2b&a&a\\a&b&b\\a&b&b\end{pmatrix}$$ *avec a,b des parametre qcq dans* $\mathbb{R}$

1. Montrer que : $M\in\mathcal{E}$
   $\iff M=$ Combinaison linéaire sur des matrices fixes.
2. En utilisant la combinaison linéaire précédente,
   montrer que $\mathcal{M}$ est stable par produit.

Calcul de A^n

Exercice 5. On considère la suite (F_n) définie par :

$$F_0=0,\ F_1=1 \text{ et } \forall\, n\in\mathbb{N},\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$$

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$

Montrer que : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ A^n=\begin{pmatrix}F_{n+1}&F_n\\F_n&F_{n-1}\end{pmatrix}$.

En déduire que : $(F_{n+1})^2-F_nF_{n+2}=(-1)^n$

Exercice 6. Soit $\theta\in\mathbb{R}$. On considère la matrice

$$M_\theta=\begin{pmatrix}\cos(\theta)&-\sin(\theta)\\\sin(\theta)&\cos(\theta)\end{pmatrix}$$

Calculer (et simplifier) M_θ^2, $(M_\theta)^{-1}$ et même $(M_\theta)^n$.

Exercice 7. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$ avec $a\neq b$.

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}a&c\\0&b\end{pmatrix}$

Montrer que : $\forall\ p\in\mathbb{N},\ A^p=\begin{pmatrix}a^p&c\,\frac{a^p-b^p}{a-b}\\0&b^p\end{pmatrix}$

Exercice 8. Soit $(a,c)\in\mathbb{C}^3$.

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}a&c\\0&a\end{pmatrix}$

Montrer que : $\forall\ p\in\mathbb{N},\ A^p=\begin{pmatrix}a^p&p\,c\,a^{p-1}\\0&a^p\end{pmatrix}$

Exercice 9. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les récurrences

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = -2u_n + 4v_n \end{cases} \quad \text{et } u_0, v_0 \in \mathbb{R}$$

On considère le vecteur colonne $\overrightarrow{X_n}$ définie par $\overrightarrow{X_n} = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

1. Calculer u_1, u_2, v_1 et v_2.
2. Trouver une matrice carrée A telle que $\overrightarrow{X_{n+1}} = A\,\overrightarrow{X_n}$.
   Calculer $\overrightarrow{X_n}$ en fonction de A, de n et de $\overrightarrow{X_0}$
3. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad A^n = 2^n \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 3^n \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$
4. Calculer u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 10. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On va calculer de A^n

1. Calculer A^3 et déterminer (λ_3, μ_3)
   tel que $A^3 = \lambda_3 A + \mu_3 A^2$.
2. Montrer qu'il existe (λ_n, μ_n)
   tel que $A^n = \lambda_n A + \mu_n A^2$.
   Et calculer λ_{n+1} et μ_{n+1} en fonction de λ_n et μ_n.
3. Calcul de λ_n et de μ_n
   (a) Montrer que la suite (λ_n) est une suite classique d'ordre 2,
   CàD calculer λ_{n+2} en fonction de λ_{n+1} et de λ_n
   (b) En déduire λ_n et μ_n.
4. Calculer A^n.

Binôme/Nilpotente/ A^n

Exercice 11. Pour les matrice suivante,
Écrire $A = \lambda I + N$
Vérifier que N est nilpotente
Et enfin calculer A^n

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 12. [Correction] Soit j la célèbre racine cubique de l'unité.
On considère

$$A = \begin{pmatrix} 2 & j & j^2 \\ j & -j & 1 \\ j^2 & 1 & -j^2 \end{pmatrix}$$

1. Pour le plaisir de manipuler le complexe j
   Rappeler les propriétés du complexe j.
   Calculer A^2.
2. On considère $N = A - I_3$. Calculer N, N^2 et N^3.
3. En utilisant l'égalité $A = I_3 + N$, calculer A^p.

Calcul de A^{-1}

Exercice 13. [Correction] On considère la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 en fonction de A et I_3
2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 14. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Trouver α, β, γ tel que
$$A^3 = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3$$
   En déduire que : la matrice A est inversible et donner A^{-1}.

Exercice 15. Justifier que la matrice est inversible et calculer son inverse avec un système

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$