Programme de colle de la semaine 13

du Lundi 13 Janvier au Vendredi 17 Janvier.

Récitation (obligatoire).

Citer les 10 verbes qui permettent de faire les maths

Réponse :

On suppose, on veux monter,

j'applique CàD général vers particulier, je dérive, j'intègre-je primitive-je somme, j'ordedegrandeur,

je résous, je choisis (réponse à trouver/montrer il existe)

On peut écrire

Questions de cours.

On fait le début des polynômes, CàD def, degré, équation polynomiale (et Taylor) donc peu de cours

J'en profite pour faire des rappel (c'est tiré du dernier DS5 de rentrée)

Exercice 1. [Correction] On considère un réel $a \in]0, \pi[$.

On considère le produit (p_n) défini par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{a}{2^k}$

On considère la suite (g_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ g_n = p_n . \sin \frac{a}{2^n}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ g_{n+1} = \frac{1}{2} g_n$
2. En déduire la valeur de p_n.
3. Déterminer un équivalent de p_n et dire si le produit (p_n) converge.

Exercice 2. [Correction] Soient le produit (p_n) et la suite (S_n) définis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $p_n = \prod_{k=1}^{n} \sqrt[k]{k}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$.

1. Étudier les variations sur $[3, +\infty[$ de la fonction f définie par $\forall x \geqslant 3,\ f(x) = \frac{\ln x}{x}$
2. En déduire que : $\forall k \geqslant 3,\quad \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x \leqslant \frac{\ln k}{k}$.
3. En déduire une minoration de S_n puis que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$
4. Exprimer le nombre p_n en fonction du nombre S_n. En déduire la limite de la suite (p_n).

Exercice 3. [Correction]

1. On considère un réel $a > 0$ et que $a \neq 1$ et le produit (p_n) défini par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + a^{2^k}\right)$.

   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a^2}$

2. On suppose que f est dérivable et $\forall x > 0,\ f'(x) = -\frac{1}{2} f\left(\frac{1}{x}\right)$

   Montrer que la fonction $g : x \longmapsto \frac{f(x)}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} f\left(\frac{1}{x}\right)$ est constante sur $]0, +\infty[$.

Exercices.

Des calculs sur les polynômes, recherche de degré, dérivée n-ième avec des poly, équations polynomiales

Correction.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé) On considère un réel $a \in]0, \pi[$.

On considère le produit (p_n) défini par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{a}{2^k}$

On considère la suite (g_n) définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ g_n = p_n . \sin \frac{a}{2^n}$.

1. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ g_{n+1} = \frac{1}{2} g_n$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $g_{n+1} = p_{n+1} . \sin \frac{a}{2^{n+1}}$

   $$= p_n \left(\cos \frac{a}{2^{n+1}} \right) \sin \frac{a}{2^{n+1}}$$

   Or on sait que $\cos\alpha \sin\beta = \frac{1}{2} \left[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \right]$

   Ainsi on a $\cos \frac{a}{2^{n+1}} \sin \frac{a}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \left[\sin \frac{a}{2^n} - \sin 0 \right] = \frac{1}{2} \sin \frac{a}{2^n}$

   $$= \frac{1}{2} p_n . \sin \frac{a}{2^n} = \frac{1}{2} g_n$$

2. En déduire la valeur de p_n.

   Pour tout $n \in, \mathbb{N}^*$, on a maintenant $g_n = \frac{1}{2} g_n = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} g_1$

   $$= \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \cos \frac{a}{2} \sin \frac{a}{2}$$

   $$= \left(\frac{1}{2} \right)^{n} \sin a$$

   Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \frac{\sin a}{2^n \sin \frac{a}{2^n}}$

3. Déterminer un équivalent de p_n et dire si le produit (p_n) converge.

   On a

   $$p_n = \frac{\sin a}{2^n \sin \frac{a}{2^n}} = \frac{\sin a}{2^n \sin \frac{a}{2^n}} \underset{n \to \infty}{=} \frac{\sin a}{2^n \left[\frac{a}{2^n} + o\left(\frac{1}{2^n} \right) \right]}$$

   $$= \frac{\sin a}{2^n \frac{a}{2^n} [1 + o(1)]} \underset{n \to \infty}{=} \frac{\sin(a)}{a} [1 + o(1)] \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{\sin(a)}{a}$$

   Ainsi le produit (p_n) converge vers $\frac{\sin(a)}{a} \neq 0$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. On étudie la fonction f. Conclusion : La fonction f définie est décroissante sur $[3,+\infty[$
2. On suppose que $k \geqslant 3$

   > Pour $\in [k, k+1]$, on a $\frac{\ln x}{x} = f(x) \leqslant f(k)$ car la fonction f est décroissante sur $[k, k+1]$, ici $k \geqslant 3$
   $\leqslant \frac{\ln k}{k}$

   > On intègre l'inégalité sur $[k, k+1]$

   $$\text{Ainsi } \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\ln k}{k} dt \begin{array}{l} = base \times hauteur \\ = \frac{\ln k}{k} \end{array}$$

3. On somme l'inégalité précédente de $k=3$ à $k=n$

   $$\begin{aligned} \text{Ainsi } \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln k}{k} &\geqslant \sum_{k=3}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\ln k}{k} dt \\ &\geqslant \int_3^{n+1} \frac{\ln k}{k} dt \\ &\geqslant \left[\frac{1}{2}\ln^2(k)\right]_3^{n+1} \\ &\geqslant \frac{1}{2}\ln^2(n+1) - \frac{1}{2}\ln^2(3) \\ &\geqslant K_{onstante} + \frac{1}{2}\ln^2(n+1) \end{aligned}$$

   Ainsi $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} \geqslant \underbrace{0}_{k=1} + \underbrace{\frac{\ln(2)}{2}}_{k=2} + K + \frac{1}{2}\ln^2(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a bien $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $p_n = \prod_{k=1}^{n} \sqrt[k]{k} = \prod_{k=1}^{n} (k)^{\frac{1}{k}} = \prod_{k=1}^{n} e^{k\ln k} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} k\ln k\right) = e^{S_n}$

   Ainsi $p_n = e^{S_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. On fait par récurrence $H_{<n>} : p_n = \dfrac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a^2}$

   Initialisation avec $n=1$

   On a facilement $p_1 = 1+a^2$ et $\dfrac{1-a^{2^2}}{1-a^2}\dfrac{1-a^4}{1-a^2} = \dfrac{\left(1-a^2\right)\left(1+a^2\right)}{1-a^2} = 1+a^2$

   Donc $H_{<1>}$ est vraie

   Hérédité : On suppose $H_{<n>}$

   $$\boxed{\begin{array}{c}\text{On veut montrer } H\langle n+1\rangle\text{, CàD}\\ p_{n+1} = \frac{1-a^{2^{n+2}}}{1-a^2}\end{array}}$$

   $$\begin{aligned}\text{On a } p_{n+1} = \prod_{k=1}^{n+1}\left(1+a^{2^k}\right) &= p_n \times \left(1+a^{2^{n+1}}\right)\\ &= \frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a^2}\left(1+a^{2^{n+1}}\right)\\ &= \frac{1^2-\left(a^{2^{n+1}}\right)^2}{1-a^2} = \frac{1-a^{2^{n+2}}}{1-a^2} \quad Fini\end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}\forall x>0,\ f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} f\left(\frac{1}{x}\right)\right]\\ &= \frac{f'(x)\sqrt{x} - f(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}^2\right)} + \frac{1}{2\sqrt{x}} f\left(\frac{1}{x}\right) + \sqrt{x}\frac{-1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= f'(x)\frac{1}{\sqrt{x}} - f(x)\frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{-1}{x\sqrt{x}} f'\left(\frac{1}{x}\right)\\ &\qquad \textit{Or on a } \forall x>0,\ f'(x) = -\frac{1}{2} f\left(\frac{1}{x}\right)\\ &\qquad\qquad \forall \square>0,\ f'(\square) = -\frac{1}{2} f\left(\frac{1}{\square}\right)\\ &\qquad\qquad \textit{et donc } f'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2} f(x)\\ &= O \qquad \textit{Il suffit de remplacer et simplifier}\end{aligned}$$