

Espace Vectoriel et ssev.		
1	$\mathbb{R}$-espace vectoriel.	2
1.1	Un peu de théorie.	2
1.2	Combinaisons Linéaires.	3
1.3	Listes espace vectoriel usuel	3
1.4	Les sous espaces vectoriels.	4
2	$\mathbb{R}^2$ Vs $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$	5
3	Intersection - Réunion.	6
4	Sous-espace vectoriel engendré.	7
4.1	Définition et propriétés.	7
4.2	Dirigé, engendré par.	8
5	Exercices	9

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Les éléments de $\mathbb{K}$ seront appelés les scalaires.

On les notera avec des lettres grecques : $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \dots$

1 $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

1.1 Un peu de théorie.

Définition 1. Produit par les scalaire, Addition

Soit E un ensemble.

> On dit que E est muni d'un "produit par les $\mathbb{R}$ -scalaires "

Ssi il existe une fonction, notée $\odot$, de $\mathbb{K} \times E$ à valeurs dans E

CàD Pour tout $\vec{x} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on peut calculer $\lambda \cdot \vec{x}$ et $\lambda \cdot \vec{x} \in E$.

> On dit que E est muni d'une addition

Ssi il existe une opération, notée $\oplus$, de $E \times E$ à valeurs dans E

CàD Pour tout $\vec{x}, \vec{x}' \in E$, on peut calculer $\vec{x} + \vec{x}'$ et $\vec{x} + \vec{x}' \in E$.

Exemples :

> Avec $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ les vecteurs du plan : on peut calculer $\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

> Avec $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ les matrices 2×2 : on peut calculer $\lambda \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 3\lambda \\ 2\lambda & 4\lambda \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \dots$

> Avec $P = P(X)$ les polynômes : on peut calculer $\lambda(2X^3 - X + 2) = 2\lambda X^3 - \lambda X + 2\lambda$ et $(2X^3 - X + 2) + (X^8 - 5X + 2) = \dots$

> Avec $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ les fonction : on peut calculer $\lambda \cdot f$ et $f + g$

Définition 2. Espace vectoriel.

Soit E un ensemble et $\mathbb{K}$ un corps.

On suppose que E est munit d'une addition, notée $+$, et d'un produit par les $\mathbb{K}$ -scalaires, notée $\cdot$.

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel Ssi

> $(E, +)$ est un groupe commutatif.

les éléments de E sont appelés les vecteurs et on les note parfois $\vec{u}$

Le neutre est noté 0_E ou $\vec{0}_E$, c'est le vecteur nul.

L'opposé de $\vec{u}$ est noté $-\vec{u}$.

> La loi $\cdot$, produit par les scalaires, doit vérifier : $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E$ et $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$$- 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$$

$$- \lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}.$$

$$- (\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$$

$$- \lambda \cdot (\mu \vec{u}) = (\lambda \cdot \mu) \vec{u}$$

Exemples :

> Le modèle : L'ensemble des vecteurs du plan est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

> L'ensemble des matrices carrée 2×2 à coefficient dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

> L'ensemble des polynômes à coefficient dans $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

> L'ensemble des fonctions de $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

> L'ensemble des suites est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Théorème 3. Formulaire complémentaire.

Soit $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

$$> \forall \lambda, \vec{u}, \text{ on a } (-1) \vec{u} = -\vec{u} \text{ et } -(\lambda \cdot \vec{u}) = \lambda \cdot (-\vec{u}) = (-\lambda) \cdot \vec{u}$$

$$> \forall \vec{u}, \text{ on a : } \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0} \quad \text{et} \quad 0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$$

$$\text{Et aussi } \lambda \cdot \vec{u} = \vec{0} \implies \lambda = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}$$

1.2 Combinaisons Linéaires.

Définition 4. CL ou Combinaison Linéaire

Soit $(E, +)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ des vecteurs de E et $\lambda, \mu, \lambda_1, \dots$ des scalaires.

On appelle Combinaison Linéaire une somme **FINIE** de vecteur pondérée par des scalaires de $\mathbb{K}$.
par exemple

$$\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \quad \text{ou} \quad \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} \quad \text{ou} \quad \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n$$

Théorème 5. Manipulation des CL

Regrouper des vecteurs, CàD $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} = \overrightarrow{Truc}$

Décomposer un vecteur, CàD $\vec{A} = \dots \vec{i} + \dots \vec{j} + \dots \vec{k}$.

Exemples de décomposition.

> On a : $z = a + ib = a.1 + b.i$ et $a + b\sqrt{2} = a.1 + b.\sqrt{2}$.

$$> \text{On a : } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3z \\ -1+z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$> \text{On a : } \begin{pmatrix} a+2b & a & a \\ a & b & b \\ a & b & b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

> On a : $2X^3 + 3X + 1 = 2.X^3 + 3.X^1 + 1.X^0$

CàD un polynôme est une CL des monôme $X^0, X^1, \dots, X^{41}, \dots, X^{1492}, \dots$

$$> \forall x, \cos(2x) \cos(3x) = \frac{1}{2} \cos(2x+3x) + \frac{1}{2} \cos(2x-3x)$$

CàD la fonction $\cos(2x) \cos(3x)$ est une CL sur des deux fonctions $\cos(5x)$ et $\cos(x)$

> Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

alors (en général) il existe r, r', λ et μ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r^n + \mu (r')^n$

CàD la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une CL des deux suites $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $((r')^n)_{n \in \mathbb{N}}$

1.3 Listes espace vectoriel usuel

Dans un Esp Vect usuel, les vecteurs ont une notation usuelle et une forme usuelle

> Les espaces vectoriels de vecteur "colonne" $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4, \dots, \mathbb{R}^n$.

$$\text{On a : } \vec{U} \in \mathbb{R}^3, \text{ on peut écrire } \vec{U} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

> Les espaces vectoriels de matrices $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \dots, \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\text{On a : } M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \text{ on peut écrire } M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

> Les espaces vectoriels de polynôme $\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}_3[X], \dots, \mathbb{R}_n[X]$ et aussi $\mathbb{R}[X]$

En classe.

> Les espaces vectoriels de fonction, noté $\mathcal{C}(\mathcal{D}, \mathcal{A})$ ou $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{A})$

On a : $f \in \mathcal{C}(\mathcal{D}, \mathcal{A})$, alors f est une fonction de $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$
et $\forall x \in \mathcal{D}$, le nombre $f(x)$ se calcule.

> Les espaces vectoriels des suites, noté $\mathbb{R}^\infty$

On a : $u \in \mathbb{R}^\infty$, on peut écrire $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_0, u_1, \dots, u_{41}, \dots, u_{1492}, \dots)$

1.4 Les sous espaces vectoriels.

Définition 6. Sous-espace vectoriel ou ssev

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit $H \subset E$.

On dit que H est sous-espace vectoriel de E (ou ssev de E) Ssi

$$> \vec{0} \in H$$

> H est stable par Combinaison Linéaire

$$\text{CàD } \left. \begin{array}{l} \vec{u} \in H \\ \vec{v} \in H \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \in H$$

Exemple dans $\mathbb{R}^3$

Les droites **Vectorielles** sont des ssev Mais pas les droites quelconque

Les Plans **Vectoriel** sont des ssev Mais pas les plans quelconque

Théorème 7.

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit H un sous-espace vectoriel.

Alors $(H, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Ainsi un sous-espace vectoriel, c'est un espace vectoriel dans un espace vectoriel.

Vocabulaire:

Les ssev de dimension 1 sont appelés les droites vectorielles.

Les ssev de dimension 2 sont appelés les plans vectorielles.

2 $\mathbb{R}^2$ Vs $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

Définition 8.

Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ se ressemblent

Description des vecteurs

> $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, c'est l'ensemble des listes (au sens informatique) de 2 réels.

$$\vec{u} \in \mathbb{R}^2, \text{ ainsi on peut écrire } \vec{u} = (x, y).$$

> $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, c'est l'ensemble des matrices colonnes avec 2 coordonnées dans $\mathbb{R}$.

$$\vec{U} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}), \text{ ainsi on peut écrire } \vec{U} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Manipulation des combinaisons linéaires, on a

> Dans $\mathbb{R}^2$, on a

$$\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} = \lambda(x, y) + \mu(x', y') = \text{on regroupe} = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y')$$

> Dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, on a

$$\lambda \vec{U} + \mu \vec{V} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \text{On regroupe} = \begin{pmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \end{pmatrix}$$

Pour rendre les calculs plus lisibles, on écrira souvent $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ à la place de (x, y) , en effet

$$\begin{pmatrix} a+b \\ b-2a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Vs } (a+b, b-2a) = a(1, -2) + b(1, 1)$$

Théorème 9. Les ssev de $\mathbb{R}^2$ - Notion de dimension

On sait intuitivement que $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$

Alors les ssev de $\mathbb{R}^2$ sont forcément de dimension 0, 1 ou 2.

Soit H un ssev de $\mathbb{R}^2$

> Si $\dim(H) = 0$, alors H est réduit au seul vecteur $\vec{0}$, CàD $H = \{\vec{0}\}$.

$H = \{\vec{0}\}$ est le seul ssev de dimension 0.

> Si $\dim(H) = 1$, alors H est une droite vectorielle.

Ainsi $\vec{0} = (0, 0) \in H$ et H est dirigé par un vecteur directeur $\vec{a} \neq \vec{0}$,

$$\text{CàD } \vec{u} \in H \iff \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ tel que } \vec{u} = \lambda \vec{a}$$

> Si $\dim(H) = 2$, alors $H = \mathbb{R}^2$.

$H = \mathbb{R}^2$ le seul ssev de $\mathbb{R}^2$ de dimension $\text{Top} = 2$, car c'est un ssev de $\mathbb{R}^2$.

3 Intersection - Réunion.

Théorème 10. Intersection - Réunion.

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F et G deux ssev de E .

Intersection de 2 ssev.

$F \cap G$ est toujours un ssev de F et de G

Propriétés.

On a $\{\vec{0}\} \subset F \cap G \subset F, G \subset E$ et

$$0 \leq \dim(F \cap G) \leq \frac{\dim(F)}{\dim(G)} \leq \dim(E)$$

Généralisation : Une intersection quelconque de ssev est encore un ssev.

Réunion de 2 ssev.

$F \cup G$ n'est pas en général un ssev de E

Plus précisément

Si $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$ alors $F \cup G$ n'est pas un ssev.

Si $F \subset G$ alors $F \cup G = G$ est un ssev.

Si $G \subset F$ alors $F \cup G = F$ est un ssev.

4 Sous-espace vectoriel engendré.

4.1 Définition et propriétés.

Définition 11. définition du Vect(...)

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

> Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ une famille de vecteur de E .

L'espace vectoriel engendré par la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$

C'est l'ensemble de toutes les CL sur les vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$.

On le note $\text{vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$

On a donc

$$\vec{u} \in \text{vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \\ tq \vec{u} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n \end{array} \right.$$

> La notion se généralise aux familles infinies

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(\vec{e}_i)_{i \in I}$ une famille infinie de vecteur de E .

l'espace vectoriel engendré par la famille infinie $(\vec{e}_i)_{i \in I}$

C'est l'ensemble de toutes les CL sur les vecteurs $(\vec{e}_i)_{i \in I}$.

On le note $\text{vect}(\vec{e}_i)_{i \in \mathbb{N}}$

Théorème 12. Propriétés.

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ une famille de vecteur de E .

On a

> **Définition.** Lorsque $\vec{u} \in \text{vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$,
on peut écrire $\vec{u} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n$ avec $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

> **Évident.** $\text{vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est un ssev de E et

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \vec{e}_k \in \text{vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n).$$

> **Optimalité.** $\text{vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est le plus petit ssev (au sens de l'inclusion)
contenant $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots$ et $\vec{e}_n$, CàD

$$\left. \begin{array}{l} H \text{ est un ssev} \\ \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \vec{e}_k \in H \end{array} \right\} \implies \text{vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) \subset H$$

4.2 Dirigé, engendré par.

Vocabulaire : Lorsque $H = \text{vect}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$,

On dit que H est engendré, dirigé par $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

On dit que $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est une famille génératrice de H .

Théorème 13. Comment trouver une famille génératrice.

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et H un ssev de E

On fait le calcul

$$\begin{aligned}\vec{u} \in H &\iff \text{On traduit } \vec{u} = \dots \\ &\iff \text{On poursuit les calculs} \\ &\iff \vec{u} = \underbrace{\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}}_{\text{CL sur des vecteurs fixes.}}\end{aligned}$$

On constate que

- > $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sont des vecteurs fixes (CàD ne dépendent pas de $\vec{u}$).
- > les α, β, γ sont des scalaires **quelconques** et **indépendants**,

Alors on peut conclure que : $H = \text{vect}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

Introduction à la dimension (Niveau 2).

> Les droites vectorielles.

Les droites vectorielles sont les ssev de dimension 1

donc les droites vectorielles sont dirigées par un vecteur $\neq \vec{O}$, CàD $D = \text{vect}(\vec{u})$

Si/lorsque les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ sont $//$ et $\vec{u} \neq \vec{O}$, on a $D = \text{vect}(\vec{u}, \vec{v}) = \text{vect}(\vec{u})$

Ainsi $1 = \dim(D) \leq \text{cardinal}(\text{Famille Généré})$

et $1 = \dim(D) = \text{cardinal}(\text{Famille Généré Optimal})$

Les Plans vectoriels.

Les plans vectoriels sont les ssev de dimension 2

donc les plans vectoriels sont dirigés par 2 vecteurs $\neq \vec{O}$ et non $//$.

Si/lorsque les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont non-optimal et $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{O}$ et non $//$, on a $P = \text{vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \text{vect}(\vec{u}, \vec{v})$

Ainsi $2 = \dim(P) \leq \text{cardinal}(\text{Famille Généré})$

et $2 = \dim(P) = \text{cardinal}(\text{Famille Généré Optimal})$

Généralisation. On suppose que $H = \text{vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p)$

> Alors $\dim(H) \leq \text{cardinal}(\text{Famille Généré}) = p$

> et $\dim(H) = p$ Ssi la famille génératrice $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p)$ est "optimal"

5 Exercices

Autour des CL.

Exercice 1. [Correction] Dans $\mathbb{R}^3$. On considère le vecteur $\vec{u} = (2, 3, 4)$

1. Est ce que le vecteur $\vec{u}$ est une CL sur $(3, -7, 0)$ et $(2, 1, 0)$?
2. Est ce que le vecteur $\vec{u}$ est une CL sur $(1, 2, -3)$ et $(-1, 5, -4)$?

Exercice 2. [Correction] Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On considère le vecteur $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, A^n est une CL sur A et I_2 .

Exercice 3. [Correction]

1. Exprimer la fonction $[\cos(3x)]$ comme une CL sur les fonctions $[\cos^3(x)]$, $[\cos^2(x)]$, $[\cos(x)]$, $[1]$.
2. Exprimer la fonction $[\cos^2(x)]$ comme une CL sur les fonctions $[\cos(2x)]$, $[1]$.
3. Exprimer la fonction $[\cos^3(x)]$ comme une CL sur les fonctions $[\cos(3x)]$, $[\cos(2x)]$, $[\cos(x)]$, $[1]$.

Exercice 4. [Correction]

1. Montrer que : $[\sin(2x)]$ n'est pas une CL sur $[\sin(x)]$, $[\cos(x)]$.
2. Est ce que $[|t|]$ n'est pas une CL sur $[t]$, $[t^2]$?

Exercice 5. [Correction] Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{1}{X^2 - 5X + 6}$ et interpréter le résultat en terme de CL.

Les ssev : niveau 0

Exercice 6. Vérifier que : H est un ssev.

$$H = \left\{ \vec{U} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } x + 2y = 0 \right\}$$

$$H = \left\{ \vec{U} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ avec } x + 2y + 3z = 0 \right\}$$

$$H = \left\{ \vec{U} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ avec } x + 2y = 0 \right\}$$

$$H = \left\{ \vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ avec } x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n = 0 \right\}$$

Exercice 7. On considère H l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ de la forme à $a(-2, 3) + b(1, 1)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Vérifier que H est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
2. Justifier que $H = \mathbb{R}^2$.

Exercice 8. Soit $\vec{a} = (-2, 3, 1)$. On considère l'ensemble.

$$H = \left\{ \vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } \vec{u} \cdot \vec{a} = 0 \right\}$$

$$H' = \left\{ \vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } \vec{u} \wedge \vec{a} = 0 \right\}$$

Vérifier que H et H' sont deux sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 9. Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère

$$H_m = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ tel que } \text{tr}(A) = m \right\}$$

Est ce que H_m est un ssev ? (On discutera en fonction de m).

Exercice 10. [Correction] Soit H l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 2a+b & b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

Vérifier que H est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 11. On considère l'ensemble

$$H = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \text{ avec } f(0) = f'(0) = 0\}$$

Vérifier que H est sous-espace vectoriel.

Exercice 12. [Correction] On considère l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + xy = 0$

Vérifier que H est sous-espace vectoriel.

Exercice 13. On considère H l'ensemble des fonctions de la forme $ae^{i2t} + be^{-i2t}$ avec $a, b \in \mathbb{C}$

Vérifier que H est sous-espace vectoriel.

Exercice 14. On se place dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions

Montrer que l'ensemble des fonctions π -périodique est un ssev.

Exercice 15. Soit la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0 \quad (R)$.

On considère l'ensemble

$$H = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ et la suite } u \text{ vérifie la récurrence } (R)\}$$

Vérifier que H est sous-espace vectoriel.

———— Les ssev de $\mathbb{R}^n$: niveau 1 ————

Exercice 16. Vérifier que : H est un ssev et déterminer une famille génératrice

$$H = \{\vec{U} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } x + 2y = 0\}$$

$$H = \{\vec{U} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ avec } x + 2y + 3z = 0\}$$

$$H = \{\vec{U} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ avec } x + 2y = 0\}$$

$$H = \{\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ avec } x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n = 0\}$$

Exercice 17. On considère les ensembles

$$F = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ et } G = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Montrer que $F = G$.

Exercice 18.

1. Montrer que : $\mathbb{R}^2 = \text{vect}(\vec{i}, \vec{j})$

2. Montrer que : $\text{vect}((1, 2), (3, 4)) = \text{vect}(\vec{i}, \vec{j}) = \mathbb{R}^2$

Exercice 19.

1. On se place dans $\mathbb{R}^3$.

On considère le plan P_1 d'équation $2x - y + 3z = 0$ et le plan P_2 dirigée par $(1, 1, -2)$ et $(2, 3, -2)$.

Déterminer $P_1 \cap P_2$. (CàD équation, une famille qui dirige et dimension).

2. On se place dans $\mathbb{R}^4$.

(a) On considère le ssev F d'équation
$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 2z = 0 \\ -2x + y + z - z = 0 \end{cases}$$

Déterminer une famille qui dirige F .

(b) On considère le plan G dirigée par $(-1, 1, 1, -2)$ et $(-2, 2, 3, -2)$.

Déterminer "une" équation G .

(c) Déterminer $F \cap G$. (CàD équation, une famille qui dirige et dimension).

————— Les ssev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: niveau 1 —————

Exercice 20. Vérifier que : H est un ssev et déterminer une famille génératrice

$$H = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \exists a, b, c \in \mathbb{R} \text{ tq } M = \begin{pmatrix} a+b & b+c \\ b+c & a+b \end{pmatrix} \right\}$$

$$H = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(AM) = 0 \right\} \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 21. On se place dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On considère l'ensemble H des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a+b & b+c \\ b+c & a+b \end{pmatrix}$

1. Montrer que H est un ssev et déterminer une famille génératrice de H .

2. Montrer que $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ engendrent H

En déduire la dimension de H .

3. Montrer que H est stable par produit.

Exercice 22. On considère l'ensemble H des matrices des matrices symétrique, CàD $H = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ tq } M^T = M\}$

Vérifier que : H est un ssev et déterminer une famille génératrice

———— Les ssev de $\mathbb{R}_n[X]$: niveau 1 ————

Exercice 23. Vérifier que : H est un ssev et déterminer une famille génératrice

$$H = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid tq \ P(1) = P'(2)\}$$

$$H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid tq \ P(1) = 0\}$$

Exercice 24. [\[Correction\]](#) On considère $H = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid tq \ P(1) = 0\}$

Vérifier que : H est un ssev et déterminer une famille génératrice

Exercice 25. On considère $H = \left\{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid tq \ X^4 P\left(\frac{1}{X}\right) = P(X)\right\}$

Vérifier que : H est un ssev et déterminer une famille génératrice

———— Les ssev de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: niveau 1 ————

Exercice 26. Vérifier que : H est un ssev et déterminer une famille génératrice

$$H = \left\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \mid tq \ f' + xf = 0\right\}$$

Exercice 27. On se place dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions

$$\text{On considère l'ensemble } H = \text{vect}\left([\cos(x)e^x], [\sin(x)e^x]\right).$$

1. Montrer que H est stable par dérivation.
2. Montrer que $H = \text{vect}\left([e^{(1+i)x}], [e^{(1-i)x}]\right).$