TD 16 Polynôme

Jeudi 16 Janvier 2025

Calculs Classiques

Exercice 1. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère le polynôme $P_n = (X^2 - 1)^n$

Calculer le degré et le coefficient dominant de $(P_n)^{(n)}$.

Exercice 2. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit T un polynôme non nul vérifiant $(1 - x^2)\, y'' - x\, y' + n^2\, y = 0$
Déterminer $\deg(T)$

Exercice 3. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère le polynôme $P = (X+1)^{2n} = (X+1)^n.(X+1)^n$.

1. Calculer le coefficient de X^n d'une part dans $P = (X+1)^{2n}$ et d'autre part dans $P = (X+1)^n.(X+1)^n$
2. En déduire que : $\displaystyle\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

Exercice 4. [Correction]
On considère la fonction ϕ de $\mathbb{R}[X]$ à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$ définie par : $\forall\, P \in \mathbb{R}[X],\ \phi(P) = P(X+1) - P(X)$

1. Calculer : $\phi\left(\dfrac{X(X-1)(2X-1)}{6}\right)$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère les polynômes H_n dit de Hilbert le polynôme définis par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad H_n = \frac{(X-1)(X-2)\ldots.(X-n)}{n!}$$

Calculer $\phi(H_n)$. Le résultat est simple
puis $\phi \circ \phi(H_n)$ et même $[\phi \circ \phi \circ \phi](H_n)$

Dérivée n-ième - Leibniz

Exercice 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit par

$$L_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,;\, x \longmapsto L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x}\, x^n\right)$$

Vérifier que que L_n est une fonction polynomiale et déterminer le degré et le coefficient dominant.

Exercice 6.

1. Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \left[\frac{1}{\cos(x)}\right]^{(n)} = \frac{P_n\left(\sin(x)\right)}{\left(\cos(x)\right)^{n+1}}$$

2. Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n est de degré n et que ses coefficients dont des entiers positifs

Taylor

Exercice 7. [Correction] Soit $a, b \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère le polynôme $P = \dfrac{X^n(a - bX)^n}{n!}$.

1. Démontrer à l'aide des formules du binôme et de Taylor, que : $\forall\, k \in \mathbb{N},\ P^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.
2. Vérifier que : $P\left(\dfrac{a}{b} - X\right) = P(X)$.

   En déduire que : $\forall\, k \in \mathbb{N},\ P^{(k)}\left(\dfrac{a}{b}\right) \in \mathbb{Z}$.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

$$
\begin{aligned}
(P_n)^{(n)} = \left[(X^2-1)^n\right]^{(n)} &= \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (X^2)^k (-1)^{n-k}\right]^{(n)} \\
&= \left[\underbrace{X^{2n}}_{k=n} + \cdots\right]^{(n)} \\
&\qquad \textit{Dérivé d'un monôme} \\
&= \frac{(2n)!}{n!} X^n + \cdots
\end{aligned}
$$

Conclusion : Le polynôme $(P_n)^{(n)}$ est de degré n et son coef dominant est $\dfrac{(2n)!}{n!}$.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé) Comme T est un polynôme $\neq 0$, on peut écrire $T = \underbrace{a}_{\neq 0} X^\alpha + \cdots$

l'équation devient

$$
\begin{aligned}
&(1-X^2)\,T'' - X\,T' + n^2\,T = 0 \\
&\qquad \iff (1-X^2)\,\left[a\alpha(\alpha-1)\,X^{\alpha-2} + \cdots\right] - X\,\left[a\alpha\,X^{\alpha-1} + \cdots\right] + n^2\,\left[a\,X^\alpha + \cdots\right] = 0 \\
&\qquad \iff X^n\,\left[-a\alpha(\alpha-1) - a\alpha + n^2 a\right] + \cdots = 0 \\
&\qquad \iff X^n\,a(-\alpha^2 + \alpha - \alpha + n^2) + \cdots = 0 \\
&\qquad \iff X^n\,a(-\alpha^2 + n^2) + \cdots = 0
\end{aligned}
$$

Un polynôme est nul Ssi ses coef sont nul donc on doit avoir

$$a(n^2 - \alpha^2) = 0 \iff a = 0 \; ou \; \alpha = n \; ou \; \alpha = -n$$

Or $a \neq 0$ et $\alpha \in \mathbb{N}$, donc seul $\alpha = n$ convient

Conclusion : Si T est une solution polynômiale non nulle de l'équation différentielle $(1-x^2)\,y'' - x\,y' + n^2\,y = 0$ alors forcément $\deg(T) = n$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. Calcul du coefficient de X^n dans P :

   D'une part

   À l'aide du binôme, on a $(X+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k$,

   Ainsi le coefficient de X^n dans P est égale à $\binom{2n}{n}$

   D'autre part

   On a $(X+1)^{2n} = (X+1)^n.(X+1)^n$

$$\begin{aligned}
\textit{Ainsi } (X+1)^{2n} &= (X+1)^n.(X+1)^n \\
&= \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k\right] \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k\right] \\
&= \left[\binom{n}{0} X^0 + \binom{n}{1} X^1 + \cdots + \binom{n}{n} X^n\right] \left[\binom{n}{0} X^0 + \binom{n}{1} X^1 \cdots + \binom{n}{n} X^n\right] \\
&= \cdots + X^{n+1} \left[\binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \cdots\right] + \cdots
\end{aligned}$$

   Ainsi le coefficient de X^n dans P est égale à $\binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \cdots = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$

2. On a donc

$$\begin{aligned}
\binom{2n}{n} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} \\
&\qquad \textit{Or a on } \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

1. On trouve $\phi\left(\frac{X(X-1)(2X-1)}{6}\right) = ... = X^2$.
2. On a

$$\begin{aligned}
\phi(H_n) &= \frac{(X)(X-1)....(X+1-n)}{n!} - \frac{(X-1)(X-2)....(X-n)}{n!} \\
&= \frac{(X)(X-1)....(X-(n-1))}{n!} - \frac{(X-1)(X-2)....(X-n)}{n!} \\
&= \frac{(X-1)(X-2)....(X-(n-1))}{n!}[X-(X-n)] \\
&= \frac{(X-1)(X-2)....(X-(n-1))}{(n-1)!} = H_{n-1}
\end{aligned}$$

   On a maintenant

$$[\phi \circ \phi](H_n) = \phi(\phi(H_n)) = \phi(H_{n-1}) = H_{n-2}$$

$$[\phi \circ \phi \circ \phi](H_n) = \phi(\phi(\phi(H_n))) = \phi(\phi(H_{n-1})) = \phi(H_{n-2}) = H_{n-3}$$

Solution de l'exercice 7 (Énoncé)

1. Démontrer à l'aide des formules du binôme et de Taylor, que : $\forall\, k \in \mathbb{N},\ P^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

Comme $\deg(P) = 2n$, on a avec Taylor

$$P = \frac{X^n(a-bX)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{2n} P^{(k)}(0)\frac{X^k}{k!}$$

Avec le binôme, on a

$$\begin{aligned} P = \frac{X^n(a-bX)^n}{n!} &= \frac{X^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}(-bX)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{a^{n-k}(-b)^k}{n!}X^{n+k} \\ &\textit{On ré-indexe avec } k' = n+k \\ &= \sum_{k'=n}^{2n}\binom{n}{k'-n}\frac{a^{2n-k'}(-b)^{n-k'}}{n!}X^{k'} \end{aligned}$$

Deux polynômes sont égaux Ssi ils ont les même coef donc coef(Gauche)=coef(Droite)

> Pour $k \in \{0, 1, ..., (n-1)\}$, on a $\dfrac{P^{(k)}(0)}{k!} = 0$.

Donc $P^{(k)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}$

> Pour $k \in \{0, 1, ..., (n-1)\}$, on a $\dfrac{P^{(k)}(0)}{k!} = \dbinom{n}{k-n}\dfrac{a^{2n-k}(-b)^{n-k}}{n!}$.

Donc $P^{(k)}(0) = \dfrac{k!}{n!}\dbinom{n}{k-n}a^{2n-k}(-b)^{n-k} \in \mathbb{Z}$ car $n \leqslant k \leqslant 2n$ et $a, b, binome \in \mathbb{Z}$

> Pour $k > 2n$. On a $P^{(k)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}$ à cause du degré.

2. Vérifier que : $P\left(\dfrac{a}{b} - X\right) = P(X)$. En déduire que : $\forall\, k \in \mathbb{N},\ P^{(k)}\left(\dfrac{a}{b}\right) \in \mathbb{Z}$.

On a facilement $P\left(\dfrac{a}{b} - X\right) = P(X)$.

On dérive k fois l'égalité, ainsi $(-1)^k P^{(k)}\left(\dfrac{a}{b} - X\right) = P^{(k)}(X)$

On applique en $X = 0$, ainsi $P^{(k)}\left(\dfrac{a}{b}\right) = (-1)^k P^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$