

DM 13 Polynôme.

Page 1

Exercice 1. [Correction] On sait qu'il existe un polynôme $T_n = T_n(X)$, dit de Chebychev, tel que

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$$

1. Calculer $T_0 = T_0(X)$ et $T_1 = T_1(X)$.
2. Simplifier $\cos(\theta) \cdot \cos(n\theta)$, en déduire que $T_{n+1}(X) = 2X T_n(X) - T_{n-1}(X)$
3. Calculer T_2 et T_3 .
Montrer que le polynôme $T_n = T_n(X)$ est de degré n et calculer son coefficient dominant.
4. Montrer que $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$

Exercice 2. [Correction] On considère la fonction ϕ de $\mathbb{R}[X]$ à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \phi(P) = (X^2 - 1)P''(X) + 2XP'(X) - 6P(X)$$

On considère $H = \{P \in \mathbb{R}[X], \phi(P) = \mathcal{O}\}$

1. Montrer que H est un Ssev
2. Soit P un polynôme non nul.
Montrer que Si $\deg(P) \neq 2$ alors $\deg \phi(P) = \deg(P)$.
Si $\deg(P) = 2$ alors $\deg \phi(P) \underset{\text{Strict}}{<} \deg(P)$.
3. Montrer que $P \in H \implies \deg(P) = 2$.
Réciproquement. Déterminer les polynômes de degré 2 qui sont dans H
4. Déterminer une famille génératrice de H .

Exercice 3. [Correction] Par abus de langage, dans tout le problème on confond polynôme et fonction polynôme. On appelle f la fonction de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(0) = 0 \text{ et } \forall x \in]0, +\infty[, f(x) = e^{-1/x}$$

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et qu'il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}$$

$$\text{et montrer que : } P_{n+1}(X) = (1 - 2nX)P_n(X) + x^2 P'_n(X)$$

2. Donner la valeur de $P_n(0)$.
3. Calculer P_0, P_1, P_2 . Déterminer le degré de P_n .
4. Vérifier que f est solution, sur l'intervalle $[0, +\infty[$, de l'équation différentielle : $x^2 y' - y = 0$
5. En utilisant la formule de Leibnitz, montrer que : $\forall x, P_{n+1}(x) + (2nx - 1)P_n(x) + n(n-1)x^2 P_{n-1}(x) = 0$

Exercice 4. [Correction] Soient $n, d \in \mathbb{N}^*$.

On note $\mathbb{U}_n = \{w_k = e^{ik2\pi/n}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}$ et $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| = 1\}$.

Le but de ce problème est d'étudier les coefficients d'un polynôme complexe $P(X) = \sum_{j=0}^d a_j X^j$ de degré d (donc $a_d \neq 0$) à partir des valeurs qu'il prend sur $\mathbb{U}_n$.

On admet que $M(P) = \sup \{|P(z)|, z \in \mathbb{U}\}$ existe

Partie 1 : Majoration des coefficients

1. Pour $q \in \mathbb{Z}$, montrer que

$$\frac{1}{n} \sum_{w \in \mathbb{U}_n} w^q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} w_k^q = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ divise } q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. En déduire que pour $k \in \{0, 1, \dots, d\}$,

$$\frac{1}{n} \sum_{w \in \mathbb{U}_n} P(w)w^{-k} = \sum_{\substack{j \in \{0, 1, \dots, d\} \\ \text{et } j \equiv k \pmod{n}}} a_j$$

Application : On suppose ici que : P est un polynôme de degré $2d$ et que $n = 2d$ et que $k = 0$

Calculer $\frac{1}{n} \sum_{w \in \mathbb{U}_n} P(w)w^{-k}$.

3. On suppose que $n > d$. On fixe $k \in \{0, 1, \dots, d\}$.

(a) Établir l'égalité : $\frac{1}{n} \sum_{w \in \mathbb{U}_n} P(w)w^{-k} = a_k$.

(b) En déduire l'inégalité : $|a_k| \leq \max \{|P(w)|, w \in \mathbb{U}_n\}$.

4. Montrer que : $\forall k \in \{0, 1, \dots, d\}, |a_k| \leq M(P)$

Partie 2 : Une majoration plus forte

On montre ici une majoration plus forte que celle de la première partie

$$\sum_{k=0}^d |a_k|^2 \leq [M(P)]^2$$

Soient $\overline{P} = \sum_{j=0}^d \overline{a_j} X^j$ le polynôme conjugué de P et $Q(X) = X^d P(X) \overline{P}\left(\frac{1}{X}\right)$.

- Montrer que Q est un polynôme et que le coefficient devant X^d vaut $\sum_{k=0}^d |a_k|^2$.
- Montrer que pour tout $z \in \mathbb{U}$, $|Q(z)| = |P(z)|^2$.
- En déduire que $M(Q) \leq M(P)^2$ puis montrer l'inégalité.

Partie 3 : Minoration de $\sup \left\{ |P(t)|, t \in [-1, 1] \right\}$ pour P unitaire de degré d

On note $\mathcal{N}_d$ l'ensemble des polynômes complexes unitaires de degré d ,
c'est à dire dont le coefficient dominant $a_d = 1$.

On admet que : $N(P) = \sup \left\{ |P(t)|, t \in [-1, 1] \right\}$ existe.

1. Les polynômes de Chebychev sont définis par récurrence par :

$$T_0(X) = 1, T_1(X) = X \text{ et } \forall d \in \mathbb{N}, T_{d+2}(X) = 2XT_{d+1}(X) - T_d(X)$$

(a) Justifier que : Pour $d \geq 1$, on a : $\mathcal{S}_d(X) = \frac{1}{2^{d-1}} T_d(X) \in \mathcal{N}_d$.

(b) Montrer que : Pour $d \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, $T_d(\cos(t)) = \cos(dt)$.

En déduire que : $N(\mathcal{S}_d) = \frac{1}{2^{d-1}}$.

2. Soit P un polynôme appartenant à $\mathcal{N}_d$.

(a) Établir l'inégalité $1 \leq M(P)$.

(b) On considère $R(X) = X^d P\left(\frac{1}{2} \left(X + \frac{1}{X}\right)\right)$.

Montrer que R est un polynôme dont on précisera le degré et le coefficient dominant.

(c) Montrer que $M(R) = N(P)$.

(d) Calculer $\sum_{w \in \mathbb{U}_{2d}} R(w)$ (Utiliser l'application de Q1.2) et conclure que $N(P) \geq \frac{1}{2^{d-1}}$.

Conclusion : Si/Lorsque/Pour-tout polynôme P unitaires de degré d ,

on a $N(P) \geq \frac{1}{2^{d-1}}$.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé) On sait qu'il existe un polynôme $T_n = T_n(X)$, dit de Chebychev, tel que

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$$

1. Calculer $T_0 = T_0(X)$ et $T_1 = T_1(X)$.

$$\begin{aligned} 2. \text{ On a facilement } \cos(\theta) \cdot \cos(n\theta) &= CC \\ &= \frac{1}{2} ([CC - SS] + [CC + SS]) \\ &= \frac{1}{2} (\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \cos(n+1)\theta &= 2\cos(\theta) \cdot \cos(n\theta) - \cos(n-1)\theta \\ \implies T_{n+1}(\square) &= 2\square T_n(\square) - T_{n-1}(\square) \end{aligned}$$

On a donc bien la relation demandée.

On dispose maintenant d'une relation de récurrence **Donc on va récurer**

3. On fait par récurrence (à 2 étages)

$$H \langle n \rangle : | T_n(X) = 2^{n-1}X^n + \dots$$

4. On fait par récurrence (à 2 étages)

$$H \langle n \rangle : | T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. **Montrer que H est un Ssev** À faire niveau 0.

2. Comme $P \neq \emptyset$, on peut écrire $P = \sum_{\alpha \neq 0} X^\alpha + \dots$. Ainsi on a

$$\begin{aligned} \phi(P) &= (X^2 - 1)P''(X) + 2XP'(X) - 6P(X) \\ &= (X^2 - 1)[a\alpha(\alpha - 1)X^{\alpha-2} \dots] + 2X[a\alpha X^{\alpha-1} \dots] - 6[aX^\alpha \dots] \\ &= X^\alpha[a\alpha(\alpha - 1) + 2a\alpha - 6a] + \dots \\ &= X^\alpha a[\alpha^2 + \alpha - 6] + \dots \\ &= X^\alpha a(\alpha - 2)(\alpha + 3) + \dots \end{aligned}$$

Conclusion Si $\alpha \neq 2$ alors $a(\alpha - 2)(\alpha + 3) \neq 0$ donc $\deg(\phi(P)) = \alpha = \deg(P)$.

Si $\alpha = 2$ alors $a(\alpha - 2)(\alpha + 3) = 0$ donc $\deg(\phi(P)) < \alpha = \deg(P)$.

3. On suppose que $\phi(P) = \emptyset$ donc $\deg(\phi(P)) = -\infty < \deg(P)$
donc forcément $\deg(P) = 2$

On suppose que $P(X) = aX^2 + bX + c \in H$. Ainsi

$$\begin{aligned} \phi(P) &= \emptyset \\ \iff (X^2 - 1)P''(X) + 2XP'(X) - 6P(X) &= \emptyset \\ \iff (X^2 - 1)[2a] + 2X[2aX + b] - 6[aX^2 + bX + c] &= \emptyset \\ \iff X^2[2a + 4a - 6a] + X[2b - 6b] + [-a - 6c] &= \emptyset \end{aligned}$$

Donc $b = 0$ et $a = -6c$. Conclusion : $P \in H \iff P = 6cX^2 - cX^0$

4. **Déterminer une famille génératrice de H .** On a

$$\begin{aligned} P \in H &\iff P = 6cX^2 - cX^0 \\ &\iff P = c(6X^2 - 1) \\ \text{Donc } H &= \text{vect}(6X^2 - 1) \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. La fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ car composée de fonction $\mathcal{C}^\infty$.

On démontre par récurrence

$$H \langle n \rangle : \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe un polynôme } P_n \\ \text{tel que } \forall x > 0, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}} \end{array} \right.$$

À l'initialisation on choisit : $P_0(X) = 1$

et à la fin de l'hérédité, on choisit $P_{n+1}(X) = (1 - 2nX) P_n(X) + X^2 P'_n(X)$ qui convient.

De plus Comme P_n est un polynôme, on a bien P_{n+1} est un polynôme.

2. Pour tout n . On applique la relation de récurrence en $x = 0$, ainsi

$$P_{n+1}(0) = (1 - 2n \cdot 0) P_n(0) + 0^2 P'_n(0)$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(0) = P_n(0)$

Conclusion : La suite $(P_n(0))$ est constante égale à $P_0(0) = 1$

3. On a que : $P_0 = 1, P_1 = 1$ et $P_2 = 1 - 2X$

On fait par récurrence

$$H_{\langle n \rangle} : \deg(P_n) = n - 1, \text{ C\`aD } P_n = \underset{\neq 0}{a} X^{n-1} + \dots$$

4. On a : $\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$ d'où le résultat.

5. On dérive n fois l'équation différentielle,... Fini.

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

Partie 1 : Majoration des coefficients

1. Pour $q \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{w \in \mathbb{U}_n} w^q &\stackrel{def}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} w_k^q = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} w_1^{kq} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (w_1^q)^k \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \square^k \quad \text{avec } \square = w_1^q \end{aligned}$$

On applique la formule des sommes géométrique Ssi $\square \neq 1$

$$> \square = 1 \iff w_1^q = 1 \iff n \text{ divise } q$$

$$\text{on a alors } \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \square^k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = \frac{1}{n} \times n = 1$$

$$> \text{Sinon } \square \neq 1 \iff w_1^q \neq 1 \iff n \text{ ne divise pas } q$$

$$\text{on a alors } \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \square^k = \frac{1 - \square^n}{1 - \square} = \frac{1 - 1}{1 - \square} = 0$$

2. Pour $k \in \{0, 1, \dots, d\}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{w \in \mathbb{U}_n} P(w) w^{-k} &= \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} P(w_p) w_p^{-k} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{j=0}^d a_j w_p^j w_p^{-k} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^d \underbrace{\left(\sum_{p=0}^{n-1} w_p^{j-k} \right)}_{=n \text{ Si } j-k \equiv 0[n] \text{ et } 0 \text{ sinon}} a_j \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\substack{j \in \{0, 1, \dots, d\} \\ \text{et } j \equiv k \pmod{n}}} \binom{n}{j} a_j = \sum_{\substack{j \in \{0, 1, \dots, d\} \\ \text{et } j \equiv k \pmod{n}}} a_j \end{aligned}$$

$$\text{Application : On a } \sum_{w \in \mathbb{U}_{2d}} P(w) = \sum_{w \in \mathbb{U}_{2d}} P(w) w^{-0} = \sum_{\substack{j \in \{0, 1, \dots, 2d\} \\ \text{et } j \equiv 0 \pmod{2d}}} a_j = a_0 + a_{2d}$$

3. On suppose que $n > d$. On fixe $k \in \{0, 1, \dots, d\}$.

(a) Comme $n > d$ et $k \in \{0, 1, \dots, d\}$, on a $j \equiv k \pmod{n} \iff j = k$

$$\text{on a } \frac{1}{n} \sum_{w \in \mathbb{U}_n} P(w) w^{-k} = \sum_{\substack{j \in \{0, 1, \dots, d\} \\ \text{et } j \equiv k \pmod{n}}} a_j = \underbrace{a_k}_{j=k}$$

(b) Je note $\max = \max \{ |P(w)|, w \in \mathbb{U}_n \}$. On a maintenant

$$|a_k| = \left| \frac{1}{n} \sum_{p=0}^n P(w_p) w_p^{-k} \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{p=0}^n \underbrace{|P(w_p)|}_{\leq \max} \underbrace{|w_p^{-k}|}_{=1} \leq \frac{1}{n} \max \times n = \max$$

4. Comme $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$, on a $\max \{ |P(w)|, w \in \mathbb{U}_n \} \leq M(P) = \sup \{ |P(z)|, z \in \mathbb{U} \}$.

Ainsi : $\forall k \in \{0, 1, \dots, d\}, |a_k| \leq \max \leq M(P)$

Partie 2 : Une majoration plus forte : On montre ici une majoration plus forte que celle de la première partie

$$\sum_{k=0}^d |a_k|^2 \leq [M(P)]^2$$

Soient $\bar{P}$ le polynôme conjugué de P et $Q(X) = X^d P(X) \bar{P}\left(\frac{1}{X}\right)$.

1. On a facilement

$$P(X) = \sum_{k=0}^d a_k X^k = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

$$\bar{P}(X) = \sum_{k=0}^d \bar{a}_k X^k = \bar{a}_d X^d + \bar{a}_{d-1} X^{d-1} + \cdots + \bar{a}_1 X + \bar{a}_0$$

$$X^d \bar{P}\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=0}^d \bar{a}_{d-k} X^k = \bar{a}_0 X^d + \bar{a}_1 X^{d-1} + \cdots + \bar{a}_{d-1} X + \bar{a}_d$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } X^d \bar{P} \bar{P}(X) &= (a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \cdots + a_1 X + a_0) (\bar{a}_0 X^d + \bar{a}_1 X^{d-1} + \cdots + \bar{a}_{d-1} X + \bar{a}_d) \\ &= \cdots + X^d \underbrace{(\bar{a}_d a_d + \bar{a}_{d-1} a_{d-1} + \cdots + \bar{a}_1 a_1 + \bar{a}_0 a_0)}_{=\sum_{k=0}^d |a_k|^2} + \cdots \end{aligned}$$

2. On sait que pour tout $z \in \mathbb{U}$, on a $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \bar{z}$

Ainsi on a pour $|z| = 1$

$$\begin{aligned} |Q(z)| &= |z^d P(z) \bar{P}\left(\frac{1}{z}\right)| \\ &= |z|^d |P(z)| |\bar{P}(\bar{z})| \\ &= 1^d |P(z)| |\overline{P(z)}| \\ &\quad \text{Or on sait que } |\overline{\square}| = |\square| \\ &= |P(z)|^2 \end{aligned}$$

3. On a donc $M(Q) \leq [M(P)]^2$

Ainsi d'après Q1.4, on a : $\sum_{k=0}^d |a_k|^2 = \text{coef de } X^d \text{ dans } Q \leq M(Q) \leq [M(P)]^2$

Partie 3 : Minoration de $\sup \left\{ |P(t)|, t \in [-1, 1] \right\}$ pour P unitaire de degré d

On note $\mathcal{N}_d$ l'ensemble des polynômes complexes normalisés (ou unitaires) de degré d ,
c'est à dire de coefficient dominant $a_d = 1$.

On fixe $P \in \mathcal{N}_d$.

1. Facile avec Q1.4 car coefficient de X^d est égale à 1.
2. Ok
3. Classique.
4. On prouve ici que, pour tout $P \in \mathcal{N}_d$, $N(P) \geq \frac{1}{2^{d-1}}$.

(a) On note $R(X) = X^d P\left(\frac{1}{2}\left(X + \frac{1}{X}\right)\right) = \sum_{k=0}^d a_k X^{d-\square^k}$ avec $\square = \frac{1}{2}\left(X + \frac{1}{X}\right)$ et $a_d = 1$

> Pour $k \in \{0, 1, \dots, d-1\}$, on a $X^{d-\square^k} = \frac{X^d}{2^k} \left(X + \frac{1}{X}\right)^k = \frac{1}{2^k} \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} X^{d+k-2p}$

est une somme de monôme X^k avec $0 < d+k-2p < 2d$

> et $X^{d-\square^k} = \frac{X^d}{2^d} \left(X + \frac{1}{X}\right)^k = \frac{1}{2^d} \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} X^{2d-2p}$

est un polynôme de la forme $\frac{1}{2^d} X^{2d} + \dots + \frac{1}{2^d} X^0$

Ainsi R est un polynôme de degré $2d$ der la forme $\frac{1}{2^d} X^{2d} + \dots + \frac{1}{2^d} X^0$.

(b) On a $R(e^{i\theta}) = e^{id\theta} P\left(\frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})\right) = e^{id\theta} P(\cos \theta)$

Ainsi on a $M(R) = N(P)$, en passant au V.A. et au sup.

(c) Avec la question Q1.2, on a

$$\sum_{w \in \mathbb{U}_{2d}} R(w) = \sum_{w \in \mathbb{U}_{2d}} R(w) w^{-0} = \sum_{\substack{j \in \{0, 1, \dots, 2d\} \\ \text{et } j \equiv 0 \pmod{2d}}} a_j = a_0 + a_{2d} = \frac{1}{2^d} + \frac{1}{2^d} = \frac{1}{2^{d-1}}$$

En suivant la même démarche qu'à la question Q1.3b et Q1.4, on a

$$\frac{1}{2^{d-1}} = \sum_{w \in \mathbb{U}_{2d}} R(w) = \sum_{w \in \mathbb{U}_{2d}} R(w) w^{-0} \leq M(R) = N(P)$$

Yes