

Exercice 1. [Correction] On considère la fonction ϕ de $\mathbb{R}[X]$ à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \phi(P) = (X^2 - 1)P''(X) + 2XP'(X) - 6P(X)$$

On considère $H = \{P \in \mathbb{R}[X], \phi(P) = \mathcal{O}\}$

1. Montrer que H est un Ssev

2. Soit P un polynôme non nul.

Montrer que Si $\deg(P) \neq 2$ alors $\deg(\phi(P)) = \deg(P)$.

Si $\deg(P) = 2$ alors $\deg(\phi(P)) \underset{\text{Strict}}{<} \deg(P)$.

3. Montrer que $P \in H \implies \deg(P) = 2$.

Réciproquement. Déterminer les polynômes de degré 2 qui sont dans H

4. Déterminer une famille génératrice de H .

Correction

Soit P un polynôme non nul, on peut écrire $P = \sum_{\alpha \neq 0} a_{\alpha} X^{\alpha} + \dots$

1. Montrer que H est un Ssev À faire niveau 0.

2. Comme $P \neq \mathcal{O}$, on peut écrire $P = \sum_{\alpha \neq 0} a_{\alpha} X^{\alpha} + \dots$. Ainsi on a

$$\begin{aligned} \phi(P) &= (X^2 - 1)P''(X) + 2XP'(X) - 6P(X) \\ &= (X^2 - 1)[a_{\alpha}(\alpha - 1)X^{\alpha-2} \dots] + 2X[a_{\alpha}X^{\alpha-1} \dots] - 6[a_{\alpha}X^{\alpha} \dots] \\ &= X^{\alpha}[a_{\alpha}(\alpha - 1) + 2a_{\alpha} - 6a_{\alpha}] + \dots \\ &= X^{\alpha}a_{\alpha}[\alpha^2 + \alpha - 6] + \dots \\ &= X^{\alpha}a_{\alpha}(\alpha - 2)(\alpha + 3) + \dots \end{aligned}$$

Conclusion Si $\alpha \neq 2$ alors $a_{\alpha}(\alpha - 2)(\alpha + 3) \neq 0$ donc $\deg(\phi(P)) = \alpha = \deg(P)$.

Si $\alpha = 2$ alors $a_{\alpha}(\alpha - 2)(\alpha + 3) = 0$ donc $\deg(\phi(P)) < \alpha = \deg(P)$.

3. On suppose que $\phi(P) = \mathcal{O}$ donc $\deg(\phi(P)) = -\infty < \deg(P)$
donc forcément $\deg(P) = 2$

On suppose que $P(X) = aX^2 + bX + c \in H$. Ainsi

$$\begin{aligned} \phi(P) &= \mathcal{O} \\ \iff (X^2 - 1)P''(X) + 2XP'(X) - 6P(X) &= \mathcal{O} \\ \iff (X^2 - 1)[2a] + 2X[2aX + b] - 6[aX^2 + bX + c] &= \mathcal{O} \\ \iff X^2[2a + 4a - 6a] + X[2b - 6b] + [-a - 6c] &= \mathcal{O} \end{aligned}$$

Donc $b = 0$ et $a = -6c$. Conclusion : $P \in H \iff P = 6cX^2 - cX^0$

4. Déterminer une famille génératrice de H . On a

$$\begin{aligned} P \in H &\iff P = 6cX^2 - cX^0 \\ &\iff P = c(6X^2 - 1) \\ \text{Donc } H &= \text{vect}(6X^2 - 1) \end{aligned}$$

Exercice 2. [Correction] Par abus de langage, dans tout le problème on confond polynôme et fonction polynôme. On considère la fonction f définie de $]0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 0 \text{ et } \forall x \in]0, +\infty[, f(x) = e^{-1/x}$$

n désigne un entier naturel non nul.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et qu'il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}$$

$$\text{et montrer que : } P_{n+1}(X) = (1 - 2nX)P_n(X) + x^2 P'_n(X)$$

2. Donner la valeur de $P_n(0)$.
3. Calculer P_0, P_1, P_2 . Déterminer le degré de P_n .
4. Vérifier que f est solution, sur l'intervalle $]0, +\infty[$, de l'équation différentielle : $x^2 y' - y = 0$
5. En utilisant la formule de Leibnitz, montrer que : $\forall x, P_{n+1}(x) + (2nx - 1)P_n(x) + n(n-1)x^2 P_{n-1}(x) = 0$

Correction

1. On démontre par récurrence

$$H \langle n \rangle : \begin{cases} \text{Il existe un polynôme } P_n \\ \text{tel que } \forall x > 0, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}} \end{cases}$$

À l'initialisation on choisit : $P_0(X) = 1$

et à la fin de l'hérédité, on choisit $P_{n+1}(X) = (1 - 2nX)P_n(X) + X^2 P'_n(X)$ qui convient.

De plus Comme P_n est un polynôme, on a bien P_{n+1} est un polynôme.

2. Pour tout n . On applique la relation de récurrence en $x = 0$, ainsi

$$P_{n+1}(0) = (1 - 2n \cdot 0)P_n(0) + 0^2 P'_n(0)$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(0) = P_n(0)$$

Conclusion : La suite $(P_n(0))$ est constante égale à $P_0(0) = 1$

3. On a que : $P_0 = 1, P_1 = 1$ et $P_2 = 1 - 2X$

On fait par récurrence

$$H_{<n>} : \deg(P_n) = n - 1, \text{ C\`aD } P_n = \underset{\neq 0}{a} X^{n-1} + \dots$$

4. On a : $\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$ d'où le résultat.

5. On dérive n fois l'équation différentielle,... Fini.

Exercice 3. [Correction] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit par

$$L_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \longmapsto L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

1. Vérifier que L_n est une fonction polynomiale et déterminer le degré et le coefficient dominant.
2. On remarque que $\forall x \in \mathbb{R}, x^{n+1}e^{-x} = x(x^n e^{-x})$.

Avec Leibniz, déterminer une relation entre $[x^{n+1}e^{-x}]^{(n+1)}$, $[x^n e^{-x}]^{(n+1)}$ et $[x^n e^{-x}]^{(n)}$.

3. En déduire une relation entre L_{n+1} , L_n et L'_n

Correction

1. Avec Leibniz, on a

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, L_n(x) &= e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) = e^x \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [x^n]^{(k)} [e^{-x}]^{(n-k)} \right) \\ &= e^x \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left[\frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k} \right] [(-1)^{n-k} e^{-x}] \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} (-1)^{n-k} X^{n-k} \underbrace{e^x e^{-x}}_{=1} \\ &= \sum_{k=0}^n \underbrace{\binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} (-1)^{n-k}}_{\in \mathbb{R}} X^{n-k} \in \mathbb{R}[X] \end{aligned}$$

Conclusion : L_n est bien un polynôme.

2. On dérive $(n+1)$ fois l'égalité : $\forall x \in \mathbb{R}, x^{n+1}e^{-x} = x(x^n e^{-x})$, ains

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, [x^{n+1}e^{-x}]^{(n+1)} &= [x(x^n e^{-x})]^{(n+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \underbrace{[x]^{(k)}}_{=0 \text{ Si } k \geq 2} [x^n e^{-x}]^{(n+1-k)} \\ &= \underbrace{\binom{n+1}{0} [x]^{(0)} [x^n e^{-x}]^{(n+1-0)}}_{k=0} + \underbrace{\binom{n+1}{1} [x]^{(1)} [x^n e^{-x}]^{(n+1-1)}}_{k=1} + O + O + \dots \\ &= 1.x. [x^n e^{-x}]^{(n+1)} + (n+1).1. [x^n e^{-x}]^{(n)} \\ &= x. [x^n e^{-x}]^{(n+1)} + (n+1). [x^n e^{-x}]^{(n)} \end{aligned}$$

3. On a $[x^{n+1}e^{-x}]^{(n+1)} = e^{-x} L_{n+1}(x)$
 $[x^n e^{-x}]^{(n)} = e^{-x} L_n(x)$

$$\begin{aligned} [x^n e^{-x}]^{(n+1)} &= \left([x^n e^{-x}]^{(n)} \right)' \\ &= (e^{-x} L_n(x))' \\ &= (-1)e^{-x} L_n(x) + e^{-x} L'_n(x) \end{aligned}$$

Conclusion : on a $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} L_{n+1}(x) = x \left[(-1)e^{-x} L_n(x) + e^{-x} L'_n(x) \right] + (n+1)L_n(x)$

$$\text{Donc } L_{n+1} = X L'_n + (n+1 - X) L_n$$

Exercice 4. [Correction]

1. Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \left[\frac{1}{\cos(x)} \right]^{(n)} = \frac{P_n(\sin(x))}{(\cos(x))^{n+1}}$$

2. Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n est de degré n et que ses coefficients sont des entiers.

3. Montrer par récurrence que les coefficients sont tous positifs, CàD que : $P_n = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $a_k \geq 0$ et $a_n > 0$

Correction

1. On démontre par récurrence

$$H_{\langle n \rangle} : \begin{cases} \text{Il existe un polynôme } P_n \\ \text{tel que } \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \left[\frac{1}{\cos(x)} \right]^{(n)} = \frac{P_n(\sin(x))}{(\cos(x))^{n+1}} \end{cases}$$

Initialisation avec $n = 0$

Comme $\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \frac{1}{\cos(x)}$, donc le polynôme $P_0 = 1 X^0$ convient

Hérédité On suppose $H_{\langle n \rangle}$

On a

$$\begin{aligned} \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \left[\frac{1}{\cos(x)} \right]^{(n+1)} &= \left[\frac{P_n(\sin(x))}{(\cos(x))^{n+1}} \right]' \\ &= \frac{\cos(x) P_n'(\sin(x)) (\cos(x))^{n+1} - P_n(\sin(x)) (-\sin(x)) (n+1) (\cos(x))^n}{(\cos(x))^{2n+2}} \\ &= \frac{P_n'(\sin(x)) (\cos(x))^2 + (n+1) \sin(x) P_n(\sin(x))}{(\cos(x))^{n+2}} \end{aligned}$$

Conclusion : Le polynôme $P_{n+1} = (1 - X^2) P_n' + (n+1) X P_n$ convient et $H_{\langle n+1 \rangle}$ est vraie

2. On montre par récurrence $H_{\langle n \rangle} : P_n = \sum_{k=0}^n a_k X^k + \dots$

3. On montre par récurrence $H_{\langle n \rangle} : P_n = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $a_k \geq 0$ et $a_n > 0$

Voici l'hérédité

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= (1 - X^2) P_n' + (n+1) X P_n \\ &= (1 - X^2) \left(\sum_{k=0}^n a_k k X^{k-1} \right) + (n+1) X \left(\sum_{k=0}^n a_k X^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k k X^{k-1} - \sum_{k=0}^n a_k k X^{k+1} + (n+1) \sum_{k=0}^n a_k X^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \underbrace{a_k k}_{\geq 0} X^{k-1} + \sum_{k=0}^n \underbrace{(n+1-k)a_k}_{\geq 0} X^{k+1} \end{aligned}$$

Donc les coefficients de P_{n+1} sont positifs

et le coefficient dominant est celui du monôme X^{n+1} et il vaut $\underbrace{(n+1-n)a_n}_{k=n+1} = a_n > 0$

Exercice 5. [Correction] Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0, u_1 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$$

On considère $\overrightarrow{X_n} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. Trouver une matrice A tel que $\overrightarrow{X_{n+1}} = A\overrightarrow{X_n}$.
En déduire $\overrightarrow{X_n}$ en fonction de A et de $\overrightarrow{X_0}$

2. On va calculer A^n .

On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Justifier que P est inversible et calculer P^{-1} .

(b) Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$.

(c) En déduire une expression de A^n en fonction P et D^n .

Calculer A^n .

3. Calculer u_n en fonction de n .

Correction

1. On a

$$\overrightarrow{X_{n+1}} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5u_{n+1} - 6u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

Ainsi à la mode géo, on a $\overrightarrow{X_n} = A^n \overrightarrow{X_0}$

2. On va calculer A^n .

On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Comme $\det(P) = 2 - 3 = -1 \neq 0$ donc P est inversible et on a

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} \text{Donble} \\ \text{Symétrie} \end{pmatrix} = \frac{1}{(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(b) On trouve

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(c) Comme $D = P^{-1}AP$, on a $A = PDP^{-1}$ et $A^n = PD^nP^{-1}$.

(d) Comme $D^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$, on a

$$\begin{aligned} A^n &= P D^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n & 6 \cdot 2^n - 6 \cdot 3^n \\ -2^n + 3^n & 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + 3^n \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. On a $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \overrightarrow{X_n} = A^n \overrightarrow{X_0} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n & 6 \cdot 2^n - 6 \cdot 3^n \\ -2^n + 3^n & 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-2^n + 3^n)u_1 + (3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n)u_0 = 2^n(3u_0 - u_1) + 3^n(u_1 - 2u_0)$

Exercice 6. [Correction] Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

L'objectif est de déterminer les matrices X vérifiant : $X^2 = A$

1. Déterminer les matrices $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ tel que $AM = MA$.

2. Analyse. On suppose que X est une matrice tel que $X^2 = A$

> Vérifier que : $AX = XA$.

> En déduire que X est de la forme $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

3. Synthèse.

Parmi les matrices X de la $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, trouver celles qui vérifie $X^2 = A$.

Correction

$$1. \text{ On a : } MA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+c & a+2c \\ 2b+d & b+2d \end{pmatrix}$$

$$AM = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b & 2c+d \\ a+2b & c+2d \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi } AM = MA \iff \begin{cases} 2a+c = 2a+b \\ 2b+d = a+2b \\ a+2c = 2c+d \\ b+2d = c+2d \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -b+c=0 \\ -a+d=0 \\ a-d=0 \\ b-c=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -a+d=0 \\ -b+c=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion : $AM = MA$

Ssi on peut écrire $M = \begin{pmatrix} d & c \\ c & d \end{pmatrix}$

Ssi $M = dI_2 + cJ$

Bonus : les matrices qui commutent avec A forment un ssev engendré par I_2 et J .

2. Analyse. On suppose que X est une matrice tel que $X^2 = A$

> On a : $AX = X^2.X = X^3 = X.X^2 = XA$.

> Ainsi on peut écrire $X = \begin{pmatrix} d & c \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $d, c \in \mathbb{R}$.

3. Synthèse.

On suppose que $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$. Ainsi on a

$$X^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta^2 & 2\alpha\beta \\ 2\alpha\beta & \alpha^2 + \beta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha^2 + \beta^2 = 2$ et $2\alpha\beta = 1 \iff \beta = \frac{1}{2\alpha}$

On résout

$$\alpha^2 + \frac{1}{4\alpha^2} = 2 \iff 4\alpha^4 - 8\alpha^2 + 1 = 0$$

$$\iff \begin{cases} U = \alpha^2 \\ 4U^2 - 8U + 1 = 0 \end{cases}$$

Conclusion : On trouve U (2 solutions >0)

puis $\alpha = \pm\sqrt{U}$ (4 solutions dans $\mathbb{R}$)

puis $\beta = \frac{1}{2\alpha}$

et enfin $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ (4 solutions dans $\mathbb{R}$)