

————— Vect(...) mon ami —————

Exercice 1. On considère les complexes $r = 2 + 3i$ et $r' = \bar{r} = 2 - 3i$
On considère les fonctions

$$f_1 : t \mapsto e^{rt}, f_2 : t \mapsto e^{r't}, g_1 : t \mapsto \cos(3t)e^{2t} \text{ et } g_2 : t \mapsto \sin(3t)e^{2t}$$

et les ssev $F = \text{vect}(f_1, f_2)$ et $G = \text{vect}(g_1, g_2)$

Montrer que $F = G$.

————— Libre-Liée —————

Exercice 2. [Correction] Soit $H = \text{Vect}(X^0, id, \cos)$.

Montrer que la famille $(X^0, id, \cos)$ est libre. Déterminer $\dim H$.

Exercice 3. [Correction] Discuter selon les paramètres $u, v \in \mathbb{R}$, si la famille

$$\vec{a} = (u, 2, 0), \vec{b} = (v, 0, -1), \vec{c} = (0, 2u, v)$$

est libre ou liée et quand elle est liée, expliciter une CL nulle et, dans les différentes situations, déterminer $\dim [\text{vect}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})]$.

Exercice 4. On considère les polynômes

$$P_i = X^i(X-1)^{n-i} \text{ avec } i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

1. En utilisant un argument d'ordre de grandeur quand $x \rightarrow 0$, montrer que la famille $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, \dots, P_n)$ est libre.
2. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 5. [Correction] Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Montrer que la famille (I_2, A, A^2) liée. Déterminer $\dim \text{vect}(I_2, A, A^2)$.

Exercice 6. [Correction] On admet le résultat suivant

$$\left. \begin{array}{l} P \text{ est un polynôme} \\ \forall \square, P(\square) = 0 \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} \text{Alors par rigidité, } P = P(X) = \mathcal{O} \\ \text{CàD tous les coef de } P \text{ sont nuls.} \end{array}$$

En utilisant cet argument, montrer que les familles suivantes sont libres

- > $\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) = \cos^k(x) \text{ avec } k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}.$
- > $\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) = e^{kx} \text{ avec } k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}.$

———— Trouver une base ————

Exercice 7. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère

$$H = \left\{ \vec{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \end{cases} \right\}$$

Montrer que H est un ssev, déterminer une base et la dimension de H .

Exercice 8. [Correction] On considère l'ensemble H des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a+b & b+c \\ b+c & a+b \end{pmatrix}$

1. Montrer que H est un ssev et déterminer une famille génératrice de H .

2. Montrer que Soit les matrices $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On va montrer que $H = \text{vect}(I_2, A)$.

3. Justifier que $\dim(H) = 2$.

Exercice 9. On se place dans $\mathbb{R}_4[X]$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynôme de degré ≤ 4
On considère l'ensemble

$$H = \left\{ P \in \mathbb{R}_4[X] \text{ tel que } X^4 P\left(\frac{1}{X}\right) = P(X) \right\}$$

1. Vérifier que : Si $P \in \mathbb{R}_4[X]$ alors $X^4 P\left(\frac{1}{X}\right) \in \mathbb{R}_4[X]$.

2. Montrer que H est un ssev de $\mathbb{R}_4[X]$.

3. Déterminer une base de H .

———— Utilisation des bases ————

Exercice 10. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $H = \{P \in \mathbb{R}_n(X), \text{ tel que } P(1) = 0\}$.

1. En écrivant $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, montrer H est un ssev, déterminer la dimension de H .

2. Montrer que $((X-1), (X-1)^2, \dots, (X-1)^n)$ est une base de H

3. On suppose que $P \in \mathbb{R}_n[X]$

$$P \in H \iff P(1) = 0 \iff (X-1) \text{ se factorise.}$$

Exercice 11. [Correction] Les polynômes interpolateurs de Lagrange

On considère les polynômes

$$L_i = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} (X - k) \quad \text{avec } i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

1. Explicité L_0 et L_1 .

2. Soit $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

Déterminer le degré de L_i .

Peut-on en déduire que la famille $\mathcal{B} = (L_0, L_1, L_2, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Montrer $\mathcal{B} = (L_0, L_1, L_2, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. P qcq dans $\mathbb{R}_n[X]$

Expliciter les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$.

5. Soit $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ fixé.

Pour tout $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, exprimer $L_i(k)$ l'aide de factoriel.

C'est une généralisation des polynômes de l'exo 4

1. On a

$$L_0 = \cancel{(X-0)}(X-1)\cdots(X-n) \text{ et } L_1 = (X-0)\cancel{(X-1)}(X-2)\cdots(X-n).$$

2. Il est clair que : $\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}, \deg(L_i) = n$.

$$\text{De plus } k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}, L_i(k) = \begin{cases} = 0 & \text{si } k \neq i \\ \neq 0 & \text{si } k = i \end{cases}.$$

3. On utilise Libre + cardinal=dimension

Libre ?

Soit l'équation vectorielle $a_0 L_0 + a_1 L_1 + a_2 L_2 + \dots + a_n L_n = 0$

$$\boxed{\text{On va montrer que } a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0}$$

On applique l'égalité en $x = k$ ainsi $0 + 0 + \dots + a_k L_k(k) + \dots + 0 = 0$

comme $L_k(k) \neq 0$, on a $a_k = 0$.

Conclusion : La famille $\mathcal{B} = (L_0, L_1, L_2, \dots, L_n)$ est libre de $\mathbb{R}_n[X]$ et de $\text{cardinal} = n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$, donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Tout d'abord on justifie que la CL existe.

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{B} = (L_0, L_1, L_2, \dots, L_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X] \\ 1 \in \mathbb{R}_n[X] \end{array} \right\} \Rightarrow \text{il existe } a, b, c \text{ tel que } a_0 L_0(X) + a_1 L_1(X) + \dots + a_n L_n(X) = 1$$

Puis on calcule les scalaires.

J'applique l'égalité en $x = k$, ainsi $0 + 0 + \dots + a_k L_k(k) + \dots + 0 = 1$

$$\text{donc } a_k = \frac{1}{L_k(k)}$$

$$\text{Conclusion : } 1 = \sum_{k=0}^n \frac{L_k(X)}{L_k(k)}.$$

Généralisation : En suivant la même démarche, on a

$$\text{Si } P \in \mathbb{R}_n[X], P = \sum_{k=0}^n P(k) \frac{L_k(X)}{L_k(k)}.$$

Remarque : $L_k(k) = (k-0)(k-1)\cdots(1)\cancel{(k-k)}(-1)(-2)\cdots(-(n-k))$, donc

$$L_k(k) = (-1)^{n-1} k! (n-k)!$$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé) On fait niveau 0.

Je suppose que : $a[1] + b \cos + c \sin = 0$

CàD $\forall x \in \mathbb{R}, a + bx + c \cos(x) = 0$

On va montrer : $a = b = c = 0$

Je dérive deux fois, ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, c \cos(x) = 0$

Ainsi avec $x = 0$, on a $c = 0$.

Ainsi on a $\forall x \in \mathbb{R}, a + bx = 0$.

J'applique avec $x = 0$ et $x = 1$, ainsi $a = b = 0$ Fini.

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. On a $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \dots = 2u^2 - 2v^2$

> Lorsque $\det(\dots) = 0 \iff u = v$ ou $u = -v$, la famille est liée.

> Lorsque $\det(\dots) \neq 0 \iff u \neq v$ et $u \neq -v$, la famille est libre.

2. On note $H = \text{vect}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

> Lorsque $\det(\dots) \neq 0 \iff u \neq v$ et $u \neq -v$.

La famille $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est libre et génératrice de H donc c'est une base de H

Ainsi $\dim(H) = \text{cardinal}(\text{Base}) = 3$.

> Lorsque $u = v \implies \det(\dots) = 0$, la famille est liée.

Comme $H = \text{vect}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, ainsi on a $\dim(H) \leq 3$

On a

$$(-u) \begin{pmatrix} u \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2u \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies \vec{c} = u \vec{a} - u \vec{b}$$

Ainsi on a $H = \text{vect}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \text{vect}(\vec{a}, \vec{b})$

La famille $(\vec{a}, \vec{b})$ est génératrice de H et libre (car non//)

Donc c'est une base de H et $\dim(H) = 2$.

> Lorsque $u = -v \implies \det(\dots) = 0$, la famille est liée.

On fait pareil et on trouve $\dim(H) = 2$.

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

1. On a facilement $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ac + cd \\ ba + db & bc + d^2 \end{pmatrix}$

On a "facilement"

$$\begin{pmatrix} a^2 + bc & ac + cd \\ ba + db & bc + d^2 \end{pmatrix} = \dots \dots \dots \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \dots \dots \dots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi la famille est liée.

2. On note $H = \text{vect}(I_2, A, A^2)$. On a

> $H = \text{vect}(I_2, A, A^2)$ et $A^2 = CL(I_2, A)$ donc $H = \text{vect}(I_2, A)$.

> De plus *Sauf exception* (I_2, A) est une famille libre de H car $\neq 0$ et non//

Donc (I_2, A) est une base de H .

Conclusion : $\dim(H) = \text{cardinal}(\text{Base}) = 2$.

Solution de l'exercice 6 (Énoncé)

1. On suppose que : $a_0 f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n = 0$

ainsi on a que : $\forall x \in \mathbb{R}, a_0 + a_1 \cos(x) + a_2 \cos^2(x) + \dots + a_n \cos^n(x) = 0$

On va montrer que $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$

On remarque que : $a_0 + a_1 e^x + a_2 e^{2x} + \dots + a_n e^{nx} = P(\square)$
avec $\square = \cos(x)$ et $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n$

On utilise maintenant le théorème fondamental de rigidité des polynômes

$$\forall \square, P(\square) = 0 \implies P(X) = 0$$

Comme le polynôme P est nul, tous ses coefficients sont nuls donc $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$ Fini.

2. On suppose que : $a_0 f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n = 0$
ainsi on a que : $\forall x \in \mathbb{R}, a_0 + a_1 e^x + a_2 e^{2x} + \dots + a_n e^{nx} = 0$

On va montrer que $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$

Voici 2 façons de conclure.

> Avec les ordres de grandeur quand $x \rightarrow \infty$.

Quand $x \rightarrow \infty$ le plus "gros" à gauche, c'est : $a_n e^{nx}$,
donc forcément $a_n = 0$.

On poursuit en regardant à nouveau le plus gros. Fini

> Avec les polynômes et la rigidité.

On remarque que : $a_0 + a_1 e^x + a_2 e^{2x} + \dots + a_n e^{nx} = P(\square)$
avec $\square = e^x$ et $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n$

On utilise maintenant le théorème fondamental de rigidité des polynômes

$$\forall \square, P(\square) = 0 \implies P(X) = 0$$

Comme le polynôme P est nul, tous ses coefficients sont nuls donc $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$ Fini.

Solution de l'exercice 7 (Énoncé) On a

$$\begin{aligned} \vec{u} \in H &\iff \vec{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ et } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$Eq_2 - Eq_1 \implies Eq_2$$

$$\begin{aligned} &\iff \begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + \dots + (n-1)x_n = 0 \end{cases} \\ &\iff \vec{u} = x_3 \vec{C}_3 + \dots + x_n \vec{C}_n \end{aligned}$$

Ainsi $H = \text{vect}(\vec{C}_3, \dots, \vec{C}_n)$ donc H est ssev dirigé par $(\vec{C}_3, \dots, \vec{C}_n)$.

De plus la famille $(\vec{C}_3, \dots, \vec{C}_n)$ est libre car en escalier

Conclusion : c'est une base et $\dim(H) = \text{Cardinal} = n - 2$

Solution de l'exercice 8 (Énoncé)

1. "Classique"

$$\begin{aligned} M \in H &\iff M = \begin{pmatrix} a+b & b+c \\ b+c & a+b \end{pmatrix} \\ &\iff M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff P \in \text{vect}(I_2, A, B) \end{aligned}$$

Conclusion : $H = \text{vect}(I_2, A, B)$ est un ssev et (I_2, A, B) dirige H et $\dim(H) \leq 3$

2. On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = I_2 + B$

Ainsi $H = \text{vect}(I_2, A, B) = \text{vect}(I_2, B)$.

La famille (I_2, B) est génératrice de H et libre car non//

Conclusion : La famille (I_2, B) est une base de H et $\dim(H) = 2$

Solution de l'exercice 10 (Énoncé)

1. On a

$$\begin{aligned}
 P \in H &\iff P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \text{ et } P(1) = 0 \\
 &\iff x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \\
 &\iff \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \vec{C}_1 + \dots + x_n \vec{C}_n \\
 &\iff P = x_1(X-1) + x_2(X^2-1) + \dots + x_n(X^n-1)
 \end{aligned}$$

Ainsi $H = \text{vect}((X-1), (X^2-1), \dots, (X^n-1))$ donc H est ssev dirigé par $((X-1), (X^2-1), \dots, (X^n-1))$.

De plus la famille $((X-1), (X^2-1), \dots, (X^n-1))$ est libre

> $(\vec{C}_1, \dots, \vec{C}_n)$ est en escalier donc libre
ou bien car les degré sont 2 à 2 $\neq$

Conclusion : c'est une base et $\dim(H) = \text{Cardinal} = n$

2. La famille $\left(\underbrace{X-1}_{P_1}, \underbrace{(X-1)^2}_{P_2}, \dots, \underbrace{(X-1)^n}_{P_n} \right)$ est libre car les degré sont 2 à 2 $\neq$ et dans H car $P_k(1) = 0$
et Cardinal = n et $\dim(H) = n$

Donc la famille $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ est une base de H

3. Le sens $\Leftarrow$ est "facile".

On suppose que $P \in H$. On sait que la famille $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ est une base de H

Donc il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tel que

$$\begin{aligned}
 P &= \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n = \lambda_1(X-1) + \lambda_2(X-1)^2 + \dots + \lambda_n(X-1)^n \\
 &= (X-1) (\lambda_1 + \lambda_2(X-1) + \dots + \lambda_n(X-1)^{n-1})
 \end{aligned}$$

Donc $(X-1)$ se factorise.