

Morphisme.

1 Morphisme.	1	3 Résoudre les équations	4
1.1 Définition et Shortcut : h_A .	1	4 Bijection réciproque.	4
1.2 Opérations sur les morphismes.	2	5 Endomorphisme.	5
2 Injectivité-Surjectivité et linéarité.	2	5.1 Définition et structure algébrique.	5
2.1 Noyau et injectivité.	2	5.2 Calculs avec les endomorphismes.	6
2.2 Image et surjectivité.	3	6 Exercices.	7
2.3 Base/Bijektivité et théorème du rang.	3		

1 Morphisme.

1.1 Définition et Shortcut : h_A .

Définition 1. Définition et vocabulaire

Soit E et F deux $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Soit ϕ une fonction de E à valeurs dans F .

On dit que ϕ est un morphisme ou fonction linéaire ou application linéaire

Ssi la fonction est définie sur E , CàD $\mathcal{D} = E$ et

> ϕ associe les nulles, CàD $\phi(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$.

et

> ϕ distribue les CL, CàD

$$\forall \vec{u}, \vec{v}, \lambda, \mu, \quad \phi(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda \phi(\vec{u}) + \mu \phi(\vec{v}).$$

Notation et Vocabulaire.

> $\mathcal{L}(E, F)$, c'est l'ensemble des applications linéaires de E à valeurs dans F .

les éléments de $\mathcal{L}(E, F)$ sont appelés les *morphismes* de E dans F .

> $\mathcal{L}(E)$, c'est l'ensemble des applications linéaires de E à valeurs dans E .

les éléments de $\mathcal{L}(E)$ sont appelés les *endomorphismes* de E .

> $Isom(E, F)$, c'est l'ensemble des applications linéaires **bijectives** de E sur F .

les éléments de $Isom(E, F)$ sont appelés les *isomorphismes* de E sur F .

> $GL(E)$ ou $Aut(E)$, c'est l'ensemble des endomorphismes **bijectives** de E (sur E).

les éléments de $GL(E)$ ou $Aut(E)$ sont appelés les *automorphismes* de E .

Exemples de fonction linéaire

> La multiplication par un objet fixe est linéaire.

> J'applique en $\square = fixe$ est linéaire.

> La dérivation est linéaire.

> La trace, la transposition sont linéaires.

Théorème 2. Les morphisme de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Soit A une matrice de taille $n \times p$.

La fonction, h_A associée à la matrice A et noté h_A , est la fonction définie par

$$h_A : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n ; \vec{U} \longmapsto A\vec{U}$$

De plus cette fonction est un morphisme de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Réciproquement : Si/lorsque ϕ est un morphisme de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

alors il existe une unique matrice A tel que $\phi = h_A$

1.2 Opérations sur les morphismes.

Théorème 3. Opérations sur les morphismes

> Une CL de fonctions linéaires est encore linéaire

Soit E et F deux $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Soit $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$, CàD des morphismes de E à valeurs dans F et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{L}(E, F)$, CàD

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ est linéaire} \\ g \text{ est linéaire} \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda f + \mu g \text{ est linéaire}$$

Interprétation : $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

> Le produit de deux morphismes n'a pas de sens (en général) et n'est pas linéaire.

> Une composée de fonctions linéaires est encore linéaire

Soit E, F et G trois $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$

Alors la composée $[g \circ f]$ se calcule et $[g \circ f] \in \mathcal{L}(E, G)$,

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ est linéaire} \\ g \text{ est linéaire} \end{array} \right\} \Rightarrow [g \circ f] \text{ est linéaire}$$

> Pour des fonctions linéaires, la composée se distribue, CàD

$$(f_1 + f_2) \circ g = (f_1 \circ g) + (f_2 \circ g)$$

$$f \circ (g_1 + g_2) = (f \circ g_1) + (f \circ g_2)$$

2 Injectivité-Surjectivité et linéarité.

2.1 Noyau et injectivité.

Définition 4. Définition du noyau

Soit E, F deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels et $h \in \mathcal{L}(E, F)$, CàD une fonction linéaire de E à valeurs dans F .

Le noyau h , noté $\ker(h)$, est l'ensemble

$$\ker(h) = \{ \vec{u} \in E \text{ tel que } h(\vec{u}) = \vec{0} \}$$

Remarque Culturel : ker de l'allemand der Kern, le noyau

Théorème 5. Propriétés des noyaux

Soit E, F deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels et $h \in \mathcal{L}(E, F)$

> **Ssev.** $\ker(h)$ est un ssev du $\mathcal{D}_{\text{épart}} = E$.

> **Définition.** $\vec{u} \in \ker(h) \iff h(\vec{u}) = \vec{0}$

$$\iff \text{on résout l'équation } h(\vec{u}) = \vec{0}$$

$$\iff \text{On en déduit une famille génée de } \ker(h)$$

> **Noyau et injectivité.** $\iff \ker(h) = \{ \vec{0} \}$

> **Injectivité et Base** Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est une base du $\mathcal{D}_{\text{épart}}$ et h un morphisme

$$h \text{ est injective} \iff (h(\vec{e}_1), h(\vec{e}_2), \dots, h(\vec{e}_n)) \text{ est une famille libre (base) de } F$$

2.2 Image et surjectivité.

Définition 6. Rappel : L'image d'une fonction

Soit E, F deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels et $h \in \mathcal{L}(E, F)$, CàD une fonction linéaire de E à valeurs dans F .

L'image de h , noté $\text{Im}(h)$, est l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{A} = F$
de la forme $h(a)$ avec a un vecteur de $\mathcal{D} = E$

Théorème 7. Propriétés de $\text{Im}(h)$

Soit E, F deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels et $h \in \mathcal{L}(E, F)$

On a

> **Ssev.** $\text{Im}(h)$ est un ssev du $\mathcal{A}_{arrivée} = F$.

> **Définition.** $\vec{u} \in \text{Im}(h) \iff \text{Il existe } \vec{a} \in \mathcal{D} \text{ tel que } h(\vec{a}) = \vec{u}$

Application : $\vec{b} \in \text{Im}(h)$ Ssi l'équation $h(\vec{X}) = \vec{b}$ admet des solutions

> **La grande formule.** $\text{Im}(h) = \text{vect}(\text{ de l'image d'une base de } \mathcal{D})$
 $= \text{vect}(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n))$

Application : f est surjective $\iff \text{Im}(f) = \text{vect}(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)) = F$

> **Surjectivité et Base** Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est une base du $\mathcal{D}_{\text{épart}}$ et h un morphisme
 h est surjectif $\iff (h(\vec{e}_1), h(\vec{e}_2), \dots, h(\vec{e}_n))$ est une famille génératrice de F

2.3 Base/Bijektivité et théorème du rang.

Théorème 8. Base/Bijektivité

Soit E, F deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels et $h : E \longrightarrow F$ un morphisme.

Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de $\mathcal{D}_{\text{épart}} = E$ et h un morphisme.

h est bijectif $\iff (h(\vec{e}_1), h(\vec{e}_2), \dots, h(\vec{e}_n))$ est une famille base de F

Théorème 9. théorème du rang

Soit E, F deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$,

On a : $\dim \ker(f) + \dim \text{Im}(f) = \dim \mathcal{D}_{\text{épart}} = \dim(E)$.

3 Résoudre les équations

Théorème 10. Résoudre les équations $h(\vec{X}) = \vec{b}$

Soit E, F deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels et $\varphi : E \rightarrow F$ un morphisme.

Soit $\vec{b} \in F$ un vecteur (fixé)

Les solutions de l'équation $\varphi(\vec{X}) = \vec{b}$ sont la somme, la superposition de

> Une sol particulière, $\vec{X}_0$

> Les solution $\vec{h}$ de l'équation homogène $\varphi(\vec{X}) = \vec{0}$, CàD les vecteurs du noyau,

$$\text{Ainsi on a : } h(\vec{X}) = \vec{b} \iff \vec{X} = \vec{X}_0 + \vec{h} \quad \text{avec } \vec{h} \in \ker \varphi$$

4 Bijection réciproque.

Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est une base du $\mathcal{D}_{\text{épart}}$

Soit E, F deux $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, CàD une fonction linéaire de E à valeurs F .

On connaît les résultats suivants

> Définition de bijective.

$$f \text{ est bijective} \iff \begin{cases} f \text{ est injective} \\ f \text{ est surjective} \end{cases}$$

> inj-surj et linéarité.

$$f \text{ est injective} \iff \ker(f) = \{\vec{0}\}.$$

$$f \text{ est surjective} \iff \mathcal{A}_{\text{rri\`{v}e}} = \text{Im}(f) = \text{vect}(\text{l'image d'une base}).$$

Et en plus, il y a le théorème du rang.

Théorème 11. linéaire bijective

La bijection réciproque d'une fonction linéaire est encore linéaire.

Soit E, F deux $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Soit $f \in \text{Isom}(E, F)$, CàD une fonction linéaire **bijective** de E sur F .

Alors la bijection réciproque f^{-1} est une fonction linéaire, CàD

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ est linéaire} \\ f \text{ est bijective} \end{array} \right\} \implies f^{-1} \text{ est linéaire}$$

5 Endomorphisme.

5.1 Définition et structure algébrique.

Définition 12. Endomorphisme, Automorphisme

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Soit f une fonction.

> On dit que f est un endomorphisme de E Ssi la fonction f est une application linéaire de E à valeurs dans E .

$\mathcal{L}(E)$, c'est l'ensemble des endomorphismes de E .

> On dit que ϕ est un automorphisme de E Ssi la fonction f est un endomorphisme bijectif de E .

$Aut(E)$ ou $GL(E)$, c'est l'ensemble des automorphismes de E .

Théorème 13. Opérations classiques dans $\mathcal{L}(E)$

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Soit f, g, h des endomorphismes de E .

On a

> **CL.** $\lambda f + \mu g$ est encore un endomorphisme de E

Ainsi $\mathcal{L}(E)$ est stable par CL

> **Composée.** $f \circ g$ et $g \circ f$ se calculent et sont des endomorphismes

De plus **la composée se distribue** (comme un produit)

$$(f_1 + f_2) \circ g = (f_1 \circ g) + (f_2 \circ g)$$

et

$$f \circ (g_1 + g_2) = (f \circ g_1) + (f \circ g_2)$$

Sauf exception, $f \circ g \neq g \circ f$.

Théorème 14. injectif, surjectif, bijectif

E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $h \in \mathcal{L}(E)$, un endomorphisme de E

On suppose que $\dim(E) = n < \infty$, alors on a

$$h \text{ est injectif} \iff h \text{ est surjectif} \iff h \text{ est bijectif}$$

Attention l'hypothèse $\dim(E) = n < \infty$ est indispensable.

Structure algébrique.

> Comme $\mathcal{L}(E)$ est stable par CL, $(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

> Comme (entre autre) la composition $\circ$ se distribue, $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau non-commutatif.

Théorème 15. Le groupe $GL(E)$

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $Aut(E)$, l'ensemble des automorphismes de E

Alors $(Aut(E), \circ)$ est un groupe.

Ce qui explique l'autre notation, CàD $Aut(E) = GL(E)$.

En fait $(Aut(E), \circ)$ est le groupe des inversibles de l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$.

5.2 Calculs avec les endomorphismes.

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Soit f, g, h des endomorphismes de E .

> La fonction $id_E : E \rightarrow E; \vec{u} \mapsto \vec{u}$.

la célèbre fonction id_E est un endomorphisme bijectif de E ,
c'est donc un automorphisme de E

> Composée itérée.

Comme f est un endomorphisme,
on peut le composer avec lui même ainsi

$f \circ f$ et $f \circ f \circ f$ se calculent et sont des endomorphismes

Notation classique : On note souvent f^2 à la place de $f \circ f$ et f^3 à la place de $f \circ f \circ f$,
Convention : $f^0 = id_E$

> Polynôme d'endomorphisme.

Comme on peut faire des CL avec des endomorphismes

et que $id_E, f, f^2 = f \circ f, f^3 = f \circ f \circ f, \dots$ sont des endomorphismes

Alors le "polynôme" $2f^2 + 3f - 4id_E = 2[f \circ f] + 3f - 4id_E$
se calcule et est un endomorphisme.

Avec des endomorphismes, la composée se distribue comme un produit,
les opérations classiques sur les polynômes sont valides. Ainsi

$$(2f^2 + 3f - 4id_E) \circ (f^2 - f + 2id_E) = [4]f^4 + [3-2]f^3 + [4-3-4]f^2 + [6+4]f - [8]id_E$$

> Binôme.

Comme la composée avec des endomorphismes se comporte comme un produit non commutatif
donc en plus des opérations classiques on a

Comme $f \circ id_E = id_E \circ f$, on a

$$(id_E + f)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k = \underbrace{id_E}_{k=0} + \underbrace{nf}_{k=1} + \underbrace{\binom{n}{2} f \circ f}_{k=2} + \dots$$

Plus généralement, Lorsque $f \circ g = g \circ f$, on a $(f + g)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k \cdot g^{n-k}$

> Nilpotent.

On dit que f est un endomorphisme nilpotent d'ordre 3 Ssi $f^3 = f \circ f \circ f = 0$.

6 Exercices.

Exercice 1. Pour les fonctions f suivantes :

$$\begin{array}{l} f : (x, y) \mapsto (x + 2y, 2x - y) \\ f : (x, y) \mapsto (x + 2y, 2x - y + 1) \\ f : (x, y) \mapsto (x + 2y, 2x - y, 3x + y) \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} f : (x, y, z) \mapsto (y - x, x + y + z, x - y) \\ f : (x, y, z) \mapsto (x + y, 2x + y + z, 2) \\ f : (x, y, z) \mapsto (x + y, -2x + y) \end{array} \right.$$

1. Préciser $\mathcal{D}$ et $\mathcal{A}$.

Quand c'est possible, déterminer une matrice A tel que $f(\vec{u}) = A\vec{u}$.

Les fonction f sont-elle des morphismes ?

2. Quand f est un morphisme. On admet que f est bijective Ssi A est inversible.
Déterminer parmi les morphismes ceux qui sont bijectif.
3. Quand f est un morphisme non bijectif, déterminer $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$.

Exercice 2. On considère

$$H = \{\vec{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = 0\}$$

1. Approche classique.

Montrer que H est un ssev, déterminer une base et la dimension de H .

2. Approche avec les morphismes.

- (a) Déterminer une matrice A tel que

$$\vec{u} \in H \iff x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = 0 \iff A\vec{u} = 0$$

Trouver un morphisme f tel que $H = \ker(f)$.

- (b) Déterminer $\text{Im}(f)$. En déduire la dimension de H .

Exercice 3. [Correction] Reprendre les questions de l'exercice précédent avec

$$H = \left\{ \vec{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \end{cases} \right\}$$

Exercice 4. La fonction associée à la matrice A .

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice 2×2 . On considère la fonction h_A définie par

$$\forall \vec{X} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}), \quad h_A(\vec{X}) = A\vec{X}$$

1. Montrer que $h_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.
2. On suppose que la matrice A est inversible.
Montrer que : h_A est bijective et déterminer h_A^{-1} .

Exercice 5. On considère la fonction f définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(M) = M + M^T$$

Rappel : Déterminer un ssev H signifie trouver une base de H et la dimension de H .

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$.
2. Déterminer $\ker(f)$. En déduire la dimension de $\text{Im}(f)$.
3. Déterminer l'image d'une base $\mathcal{D}$ par f , en déduire l'image de $\text{Im}(f)$ puis la dimension $\ker(f)$.

Exercice 6. [Correction] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non nulle.

On considère la fonction f définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(M) = M + \text{tr}(M)A$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
2. On va déterminer $\text{Ker}(f)$
 - (a) Montrer que : $\text{ker}(f) \subset \text{vect}(A)$
 - (b) Étudier si $\text{vect}(A) \subset \text{ker}(f)$ et conclure que

Lorsque $\text{tr}(A) = -1$ alors $\text{ker}(f) = \text{vect}(A)$

Lorsque $\text{tr}(A) \neq -1$ alors $\text{ker}(f) = \{0\}$.
3. On suppose que $\text{tr}(A) \neq -1$.

Montrer que $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $C + \text{tr}(C)A = B$.

Exercice 7. On considère la fonction f définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad f(P) = \begin{pmatrix} P(1) \\ P(2) \\ P(-1) \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^3)$.
2. Montrer que : f est injective puis que f est bijective.
3. Déterminer l'image d'une base de $\mathcal{D}$ par f . En déduire que f est surjective puis que f est bijective.
4. En utilisant la bijectivité de f , montrer qu'il existe un unique polynôme de degré ≤ 2 tel que

$$P(1) = 2, \quad P(2) = -1, \quad P(-1) = 1$$

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction f définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad f(P) = 2P'' + 3P' - 5P$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
2. Montrer, en utilisant le degré, que : $\text{ker}(f) = \{\vec{0}\}$. En déduire que : f est bijective.
3. Déterminer l'image d'une base de $\mathcal{D}$ par f . En déduire que f est surjective puis que f est bijective.
4. En utilisant la bijectivité de f , montrer qu'il existe un unique polynôme de degré ≤ 3 tel que

$$2P'' + 3P' - 5P = 3X^3 - 1$$

Kulture : Cet exercice est la démonstration du principe du miroir.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction f définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad f(P(X)) = P(X+1) - P(X)$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
2. Déterminer l'image d'une base de $\mathcal{D}$ par f . En déduire que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$
3. En utilisant $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, montrer qu'il existe un polynôme de degré ≤ 3 tel que

$$P(X+1) - P(X) = X^2$$

Exercice 10. On considère la fonction f définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad f(P) = (P(0), P')$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Montrer que : f est injective.
3. Montrer que f est surjective.

Correction.

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. Approche classique.
2. Approche avec les morphismes.

(a) On veut

$$\vec{u} \in H \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \end{cases} \iff A\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ convient

On considère la fonction f définie par $f(\vec{u}) = A\vec{u}$

$$\text{on a } \vec{u} \in H \iff A\vec{u} = 0 \iff f(\vec{u}) = 0 \iff \vec{u} \in \ker(f). \\ \text{Donc } H = \ker(f).$$

(b) Étude de $\text{Im}(f)$.

> La fonction f est définie de $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$.

> $\text{Im}(f)$ est un ssev de $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$
Donc $\dim(\text{Im}(f)) \leq 2$.

> Le théorème du rang n'apporte aucune information tangible.

> On sait

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \text{vect}(\text{l'image d'une base}) \\ &= \text{vect}(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)) \end{aligned}$$

$$\text{Or } f(\vec{e}_1) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{C}_1}, \quad f(\vec{e}_2) = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{C}_2}, \dots$$

Les vecteurs $\vec{C}_1, \vec{C}_2$ forment une famille libre de $\text{Im}(f)$ car $\neq 0$ et non //.
Ainsi $\dim(\text{Im}(f)) \geq \text{cardinal}(\text{libre}) = 2$

Conclusion : $\dim(\text{Im}(f)) = 2$.

Grâce au théorème du rang, on a $\dim(H) = \dim(\ker(f)) = n - 2$

Solution de l'exercice 6 (Énoncé)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice. On considère la fonction f définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(M) = M + \text{tr}(M)A$$

1. Comme $M, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il est clair que f est à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Linéaire ?

> $\vec{0} \mapsto \vec{0}$? On a $f(0) = 0 + \text{tr}(0)A = 0$,
Donc f conserve le vecteur nul.

> $CL \mapsto CL$? On a

$$\begin{aligned} f(\lambda M + \mu M') &= (\lambda M + \mu M') + \text{tr}(\lambda M + \mu M')A \\ \text{Or on sait que : } \text{tr}(\lambda M + \mu M') &= \lambda \text{tr}(M) + \mu \text{tr}(M') \\ \text{Finir les calculs.} \end{aligned}$$

2. On va déterminer $\text{Ker}(f)$

(a) On va démontrer $\ker(f) \subset \text{Vect}(A)$ avec la définition.

On suppose que $M \in \ker(f)$

On va montrer que : $M \in \text{Vect}(A)$

Comme $M \in \ker(f)$, on a $f(M) = M + \text{tr}(M)A = 0$.

Ainsi $M = -\text{tr}(M)A \in \text{Vect}(A)$ car $-\text{tr}(M) \in \mathbb{R}$ est un scalaire.

(b) On suppose que $M \in Vect(A)$.

On va calculer $f(M)$

Comme $M \in Vect(A)$, on a $M = \lambda A$, ainsi

$$f(M) = (\lambda A) + tr(\lambda A)A = \lambda [1 + tr(A)] A$$

> Lorsque $tr(A) = -1$ alors $f(M) = 0$ donc $Vect(A) \subset \ker(f)$ et donc $\ker(f) = Vect(A)$.

> Lorsque $tr(A) \neq -1$ alors $\lambda = 0$ et donc $\ker(f) = \{0\}$.

3. On suppose que $tr(A) \neq -1$.

On vient de voir que $\ker(f) = \{\vec{0}\}$ la fonction f est injective.

Ainsi f est un endomorphisme, injectif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2 < \infty$

Donc f est bijectif, c'est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi $\forall B \in \mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation $f(M) = B$ admet une unique solution notée C

Conclusion : $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $C + tr(C)A = B$.