Pour ce devoir vous devez faire

> Soit coté 1 matrice *(classique)*, Soit coté 2 matrice *(vraiment plus dur)*

> La partie Ssev.

> Soit coté 1 Polynôme*(classique)*, Soit coté 2 suite. *(pas si dur mais pas classique)*

BARACAND, BAPTISTE, CHASSAING, NIVET doivent faire coté 2 matrice et coté 2 suite *et si il reste du temps les ssev.*

Matrice coté 1

Exercice 1. On se propose d'étudier la suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$u_0=0, u_1=0, u_2=1 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+3}=2u_{n+2}-\frac{5}{4}u_{n+1}+\frac{1}{4}u_n\ .$$

On considère $\forall n\in\mathbb{N}, \overrightarrow{X_n}=\begin{pmatrix} u_{n+2}\\ u_{n+1}\\ u_n\end{pmatrix}$.

1. Calculer $\overrightarrow{X_0}$ et $\overrightarrow{X_1}$
   Déterminer $A\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\forall n\in\mathbb{N}, \overrightarrow{X_{n+1}}=A\overrightarrow{X_n}$.
   En déduire, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'expression de $\overrightarrow{X_n}$ en fonction de n et des puissances de A.
2. On considère les matrices $P=\begin{pmatrix}1&1&4\\1&2&4\\1&4&0\end{pmatrix}$ et $T=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que P est inversible.
   (b) Vérifier que : $PT=AP$ en déduire que : $A=PTP^{-1}$.
   (c) Exprimer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, A^n en fonction de T^n.
3. Calcul de u_n.
   On remarque : $T=D+N$ avec $D=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
   (a) Calculer N et justifier que l'on peut utiliser la formule du binôme pour calculer T^n.
   (b) Déterminer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'expression de T^n en fonction de n.
   (c) En déduire, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la dernière ligne de A^n en fonction de n.
   (d) Déduire pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n.
   Déterminer la limite de la suite (u_n).

Matrice coté 2

Exercice 2. [Correction] Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note

> I_n la matrice identité de taille n

> $\mathrm{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1, CàD Attila de taille n.

> $\overrightarrow{C_n}$ la matrice colonne de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1 .

1. Un exemple avec $n=5$.

   On considère

$$\mathrm{L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$$

   (a) Exprimer $\mathrm{L}^2 + \mathrm{L}$ à l'aide des matrices A_5 et I_5.
   Exprimer A_5^2 en fonction de la matrice A_5.
   Déterminer un polynôme P de degré 4 tel que la matrice $\mathrm{P}(\mathrm{L})$ soit nulle.

   (b) En déduire que L est inversible et expliciter son inverse.

   (c) Calculer $L.\overrightarrow{C_5}$ et en déduire la somme des coefficients de L^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

2. Cas général.

   Soit n et p des entiers tels que $2 \leqslant p \leqslant n-1$.
   Soit $\mathrm{M} = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice (dont on ne demande pas de justifier l'existence) de taille n,
   symétrique par rapport à la diagonale ainsi $m_{i,j} = m_{j,i}$ et $\mathrm{M}^T = \mathrm{M}$,
   à coefficients diagonaux nuls
   et telle que :

   > Chaque ligne de M comporte p coefficients égaux à 1 et $(n-p)$ coefficients égaux à 0 .

   > Pour tous entiers $i, j \in \{1,2,\dots,n\}$ tels que $i \neq j$,
   le coefficient $m_{i,j}$ est nul **si et seulement si** il existe un entier $k \in \{1,2,\dots,n\}$ tel que $m_{i,k} = m_{k,j} = 1$.
   De plus l'entier k est alors unique.

   Remarque non utile pour la résolution : La dernière condition signifie que :

   Si on prend 4 coef de la matrice $m_{k,k}, m_{i,k}, m_{k,j}, m_{i,j}$ qui forme un rectangle avec $m_{k,k}=0$ sur la diagonale de la matrice et avec une diagonale du rectangle $m_{i,k} = m_{k,j} = 1$
   alors le 4-ième sommet du rectangle $m_{i,j}$ est égale à 0.
   De plus ce rectangle est unique
   La matrice L vérifie les conditions ci-dessus et on a bien (exemple)

$$\text{Pour } a_{5,1}=0, \text{ on a } k=4 \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & \boxed{0} & 1 \\ \boxed{0} & 0 & 1 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix} \text{ et pour } a_{2,4}=0, \text{ on a } k=1 \text{ et } \begin{pmatrix} \boxed{0} & 1 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Calcul de $M^2 = (a_{i,j})$.

   i. Expliciter la valeur théorique de $a_{i,j}$ à l'aide d'une somme.

   ii. Soit $i \neq j$ avec $m_{i,j} = 1$.
   Pour $k \in \{1,2,\dots,n\}$, que vaut $m_{i,k} m_{k,j}$? En déduire la valeur de $a_{i,j}$.

   iii. Soit $i \neq j$ avec $m_{i,j} = 0$.
   Pour $k \in \{1,2,\dots,n\}$, que vaut $m_{i,k} m_{k,j}$? En déduire la valeur de $a_{i,j}$.

   iv. Soit $i \in \{1,2,\dots,n\}$, combien vaut $a_{i,i}$?

   v. En déduire que $\mathrm{M}^2 = \mathrm{A}_n - \mathrm{M} + (p-1)\mathrm{I}_n$.

   (b) En utilisant la matrice colonne $\overrightarrow{C_n}$, montrer que $p^2 + 1 = n$.

   (c) En vous inspirant de la démarche de Q1a, trouver un polynôme P de degré 4 tel que la matrice $\mathrm{P}(\mathrm{M})$ soit nulle.
   La matrice M est-elle inversible ?

Ssev pour tout le monde.

Exercice 3. [Correction] On note H l'ensemble des polynômes vérifiant l'équation différentielle (E) $\dfrac{X^2-1}{2}P''-XP'+P=0$

1. Que signifie $P\in H$? Montrer que : H est un ssev de $\mathbb{R}[X]$
2. Montrer que si P est un polynôme non-nul appartenant à H alors

$$\deg\left(\frac{X^2-1}{2}P''-XP'+P\right)=\begin{cases} =\deg(P) & \text{Si } \deg(P)\neq 2 \ ou\ 1 \\ <\deg(P) & \text{Si } \deg(P)=2 \ ou\ 1\end{cases}$$

3. Si P est un polynôme appartenant à H alors $\deg(P)\leqslant 2$.
4. Déterminer les polynôme appartenant à H. En déduire que : $H=vect\left(X,X^2+1\right)$.

Exercice 4. [Correction] Soit n un entier.

On note H_n l'ensemble des polynômes vérifiant l'équation différentielle

$$(E)\quad 2\left(X^2+X+1\right)P'-n(2X+1)P=0$$

1. Que signifie $P\in H_n$? Montrer que : H_n est un ssev de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que : Si P est un polynôme non-nul appartenant à H_n alors $\deg(P)=n$.
3. On suppose que P_1 est un polynômes non-nul H_n et que P est un autre polynôme de H_n
   (a) Montrer qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $P-\lambda P_1$ est un polynôme de degré $\leqslant(n-1)$.
   (b) En déduire que : $P=\lambda P_1$.
   (c) En déduire que $H_n=\{\mathcal{O}\}$ ou $H_n=vect(P_1)$
4. Détermination de H_n
   (a) Résoudre l'équation différentielle : $2\left(x^2+x+1\right)y'-n(2x+1)y=0$.
   (b) En déduire H_n selon la valeur de n.

Exercice 5. [Correction] Soit n un entier. On note $\mathcal{C}=(\mathbb{R},\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On considère H_n l'ensemble des solutions (sur $\mathbb{R}$) de l'équation différentielle : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}y^{(k)}=0$

1. Montrer que H_n est ssev de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Montrer que $f\in H_n \iff \forall x\in\mathbb{R},\ \left[f(x)\,e^x\right]^{(n+1)}=0$.
3. En déduire que $H=vect\left(f_0,f_1,\dots,f_n\right)$ avec $f_k:x\longmapsto x^k e^{-x}$.

Coté 1 Polynôme

Exercice 6. [Correction] La partie 1 d'un concours de 2019 (le sujet complet trop long comptait en tout 9 parties à faire en 4 heures.)

Soit l'intervalle $I =]-\pi/2\,, \pi/2\,[$. On considère la fonction f définie sur I par

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{\sin x + 1}{\cos x}.$$

On note $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de f et, par convention, $f^{(0)} = f$.

1. Exprimer les dérivées f', f'' et $f^{(3)}$ à l'aide des fonctions usuelles.
2. On va montrer que pour tout n, il existe une suite de polynômes P_n à coefficients réels telle que
$$\forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}.$$
   (a) En utilisant la question Q1., expliciter les polynômes P_0, P_1, P_2, P_3.
   (b) Montrer le résultat par récurrence et exprimer P_{n+1} en fonction de P_n et P'_n.
3. Soit $n \geqslant 1$,
   (a) Montrer que le polynôme P_n est unitaire, de degré n et que ses coefficients sont des entiers.
   (b) Montrer que ses coefficients sont positifs.
4. Pour tout entier naturel n, on pose $\alpha_n = f^{(n)}(0)$.
   (a) Montrer que : $\forall x \in I,\ 2f'(x) = f(x)^2 + 1$.
   (b) En utilisant Leibniz, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k}$.

Coté 2 Suite

Exercice 7. [Correction] Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n+1}$$

Observez que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne rentre pas dans le cadre des suites vérifiant une relation du type « $u_{n+1} = f(u_n)$ »

1. Montrer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que : $\forall\, n \geqslant 1,\ u_n > 1$
2. Montrer que : si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite vaut 1.
3. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
   Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Puis montrer qu'il existe N_0 tel que $\forall\, n \geqslant N_0,\ u_{n+1} - u_n < 0$.
   Conclure.
4. Justifier l'existence d'un entier naturel p tel que $u_{p+1} \leqslant u_p$,
   Puis démontrer que : $\forall\, n \geqslant p,\ u_{n+1} \leqslant u_n$
5. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 8. [Correction] Le nombre de Liouville

Notation : On note $\mathbb{Z}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients entiers.

Un nombre complexe r est dit algébrique

Ssi il existe un polynôme P *non nul à coefficients entiers* tel que $P(r)=0$.

Ssi r est une racine d'un polynôme non-nul $P \in \mathbb{Z}[X]$

Par exemple : $r = {}^{a}/_{b} \in \mathbb{Q}$ est algébrique car r est une racine de $P(X) = bX - a \in \mathbb{Z}[X]$

$r = \sqrt{2}$ est algébrique car r est une racine de $P(X) = X^2 - 2 \in \mathbb{Z}[X]$

Un nombre qui n'est pas algébrique est dit transcendant.

Le but de l'exercice est de prouver qu'il existe des nombres transcendants.

1. Exemples
   (a) Montrer que le célèbre complexe j est algébrique.
   (b) Montrer que le réel $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ est algébrique (plus délicat).
2. Une minoration utile.
   Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme non nul de degré d.
   On suppose que $r = {}^{a}/_{b} \in \mathbb{Q}$ **N**'est **PAS** une racine de P.
   Montrer que : $\left|P\left(\dfrac{a}{b}\right)\right| \geqslant \dfrac{1}{b^d}$
3. Le nombre de Liouville
   On considère la suite (S_n) définie par $\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{10^{k!}}$
   (a) Démontrer que la suite (S_n) converge vers une limite noté ℓ comme Liouville
   indication : On pourra majorer S_n à l'aide d'une suite Géo
   (b) Soit $n, p \in \mathbb{N}$ avec $0 \leqslant n \leqslant p$. Montrer que : $\left|S_p - S_n\right| = \sum_{k=n+1}^{p} \dfrac{1}{10^{k!}} \leqslant \dfrac{10^{-(n+1).n!} - 10^{-(p+1).n!}}{1-10^{-n!}}$
   indication : On pourra majorer $\left|S_p - S_n\right| = \sum_{k=n+1}^{p} \dfrac{1}{10^{k!}}$ à l'aide d'une suite Géo
   (c) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |\ell - S_n| \leqslant \dfrac{1}{10^{n.n!}}$
4. On va démontrer (avec un RA) que le nombre ℓ est transcendant (Liouville en 1874).
   On suppose que ℓ est algébrique, ainsi il existe un polynôme P *non nul à coefficients entiers* tel que $P(\ell) = 0$.
   On note d le degré de P.
   (a) *On admet qu'il existe une constante K tel que $\forall\, t \in [\ell-1, \ell+1]$, $\left|P'(t)\right| \leqslant K$*
   Montrer qu'il existe K' tel que : Si $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ avec $\left|\ell - \dfrac{a}{b}\right| \leqslant 1$, alors on a $\left|\ell - \dfrac{a}{b}\right| \geqslant \dfrac{K}{b^d}$
   Remarque : Le résultat admis incite à utilise le TAF.
   (b) En utilisant Q3c., trouver déduire une absurdité.

Ainsi l'hypothèse "le nombre ℓ est algébrique" est absurde

Conclusion le nombre ℓ est transcendant.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. Un exemple avec $n=5$.

   (a) Exprimer L^2+L à l'aide des matrices A_5 et I_5.
   exprimer A_5^2 en fonction de la matrice A_5.
   Déterminer un polynôme P de degré 4 tel que la matrice P(L) soit nulle.

   On a $L^2 = \begin{pmatrix} 2&0&1&0&1\\ 0&2&0&1&1\\ 1&0&2&1&0\\ 0&1&1&2&0\\ 1&1&0&0&2 \end{pmatrix}$. Ainsi $L^2+L = A_5+I_5$

   On a $(A_5)^2 = 5A_5$, ainsi on a

   $$\begin{aligned} \left(L^2+L-I_5\right)^2 &= 5\left(L^2+L-I_5\right) \\ \iff L^4+2L^3+L^2-2L+I_5 &= 5L^2+5L-5I_5 \\ \iff L^4+2L^3-4L^2-7L+6I_5 &= 0 \end{aligned}$$

   (b) En déduire que L est inversible et expliciter son inverse.

   Classique

   (c) Calculer $L.\overrightarrow{C_5}$ et en déduire la somme des coefficients de L^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

On a "facilement" que : La somme des coefficients d'une matrice M est égale à la somme des coordonnée de $M.\overrightarrow{C}$

   De plus on a $L.\overrightarrow{C_5} = 2\overrightarrow{C_5}$ et $L^p.\overrightarrow{C_5} = L^{p-1}\left(2\overrightarrow{C_5}\right) = ... = 2^p\overrightarrow{C_5}$

   Donc la somme des coefficients de L^p est égale à 5.2^p

2. Cas général.

   (a) Calcul de $M^2 = \left(a_{i,j}\right)$.

   i. Expliciter la valeur théorique de $a_{i,j}$ à l'aide d'une somme.

   On a $\forall i,j \in \{1,2,...,n\},\ a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}m_{k,j}$

   ii. Soit $i \neq j$ avec $m_{i,j}=1$. Pour $k \in \{1,2,...,n\}$, que vaut $m_{i,k}m_{k,j}$? En déduire la valeur de $a_{i,j}$.

   On a "$m_{i,j}=0$ **si et seulement si** ....."

   Donc comme ici $m_{i,j}=1$ on a $k \in \{1,2,...,n\}$, on a $m_{i,k}=0$ OU $m_{k,j}=0$

   Ainsi on a : Pour tout k, $m_{i,k}m_{k,j}=0$ et $a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}m_{k,j} = 0$

   iii. Soit $i \neq j$ avec $m_{i,j}=0$. Pour $k \in \{1,2,...,n\}$, que vaut $m_{i,k}m_{k,j}$? En déduire la valeur de $a_{i,j}$.

   On a "$m_{i,j}=0$ **si et seulement si** ..... ET **unique**"

   Donc il existe un unique $k_0 \in \{1,2,...,n\}$ tel que $m_{i,k_0}=1$ ET $m_{k_0,j}=1$

   Ainsi on a : Pour tout $k \neq k_0$, $m_{i,k}m_{k,j}=0$

   et $a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}m_{k,j} = \sum_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^{n} m_{i,k}m_{k,j} + m_{i,k_0} = 1m_{k_0,j} = 0+0+++0+1 = 1$

   iv. Soit $i \in \{1,2,...,n\}$, combien vaut $a_{i,i}$?

   Comme M est symétrique, on a : pour tout $i \in \{1,2,...,n\}$,

   $$a_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}m_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}^2$$

   CàD a_{ii} est la somme des carrés de la ligne i de la matrice M donc égale à p

   v. En déduire que $M^2 = A_n - M + (p-1)I_n$.

   On a M^2+M est la matrice avec que des 1 sauf sur la diagonale où c'est égale à p

   Conclusion : $M^2+M = A_n+(p-1)I_n$

   (b) En utilisant la matrice colonne $\overrightarrow{C_n}$, montrer que $p^2+1=n$.

   On a :

   $$M\overrightarrow{C_n} = p\overrightarrow{C_n},\ M^2\overrightarrow{C_n} = p^2\overrightarrow{C_n},\ A_n\overrightarrow{C_n} = n\overrightarrow{C_n} \text{ et } I_n\overrightarrow{C_n} = \overrightarrow{C_n}$$

   $$\begin{aligned} \text{ET } M^2\overrightarrow{C_n} &= \left[A_n - M + (p-1)I_n\right]\overrightarrow{C_n} \\ &= A_n\overrightarrow{C_n} - M\overrightarrow{C_n} + (p-1)I_n\overrightarrow{C_n} \end{aligned}$$

   Conclusion : on a $p^2 = n-p+(p-1) = n-1$

   (c) En vous inspirant de la démarche de Q1a, trouver un polynôme P de degré 4 tel que la matrice P(M) soit nulle.
   La matrice M est-elle inversible ?

   Comme $(A_n)^2 = 2A_n$, on reprend la méthode de la question Q1a.

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. La fonction ϕ est linéaire car $\phi(0) = 0$

$$\text{et } \phi(\lambda P + \mu Q) = \cdots$$

La fonction ϕ est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$

On suppose que $P \in \mathbb{R}_n[X]$, CàD $P = a_n X^n + \cdot$. On a

$$\begin{aligned}
\phi(P) &= \frac{X^2-1}{2}P'' - XP' + P \\
&= \frac{X^2-1}{2}[n(n-1)a_n X^{n-2} + cdots] - X[na_n X^{n-1} + cdots] + [a_n X^n + cdots] \\
&= X^n \left[\frac{n(n-1)a_n}{2} - na_n + a_n\right] + \cdots \in \mathbb{R}_n[X]
\end{aligned}$$

Donc ϕ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$

2. Étude de $\ker\phi$.

(a) On suppose que $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et que $deg(P) = \alpha$, CàD $P = \underbrace{a}_{\neq 0} X^\alpha + \cdots$ est $\alpha \leqslant n$.

On a

$$\begin{aligned}
\phi(P) &= \frac{X^2-1}{2}P'' - XP' + P \\
&= \frac{X^2-1}{2}[\alpha(\alpha-1)aX^{\alpha-2} + cdots] - X[\alpha a X^{\alpha-1} + cdots] + [aX^\alpha + cdots] \\
&= X^\alpha \left[\frac{\alpha(\alpha-1)a}{2} - \alpha a + a\right] + \cdots \\
&= X^\alpha a \left[\frac{\alpha^2 - \alpha - 2\alpha + 2}{2}\right] + \cdots \\
&= X^\alpha a \left[\frac{\alpha^2 - 3\alpha + 2}{2}\right] + \cdots \\
&= X^\alpha \underbrace{a}_{\neq 0} \left[\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2}\right] + \cdots
\end{aligned}$$

Conclusion : Si $\alpha \neq 1,2$, on a bien $\deg\phi(P) = \alpha = \deg(P)$

(b) On vient de voir que Si $\deg(P) \neq 1,2$ alors $\deg\phi(P) = \alpha = \deg(P)$ et donc $P \notin \ker(\phi)$
Ainsi $P \in \ker(phi) \implies \deg(P) = 1,2$. On a maintenant

$$\begin{aligned}
P \in \ker(\phi) &\iff P = aX^2 + bX + c \ et \ phi(P) = 0 \\
&\iff \frac{X^2-1}{2}P'' - XP' + P = 0 \\
&\iff \frac{X^2-1}{2}2a - X(2aX + b) + (aX^2 + bX + c) = 0 \\
&\iff X^2(a - 2a + a) + X(-b + b) + (-a + c) = 0 \\
&\iff -a + c = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\iff P = bX + c(X^2 + 1)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\ker\phi = vect\left(X, X^2+1\right)$ et comme la famille est libre (à cause des degré) c'est une base et $\dim\ker(\phi) = 2$

3. Étude de Imϕ.

(a) Voir TD 19 exo 2

(b) On suppose que $P \in \text{Im}(\phi)$, CàD $P = \phi(Q) = \dfrac{X^2-1}{2}Q'' - XQ' + Q$

$$\boxed{\text{On va montrer que : } P'(1) = P'(-1) = 0}$$

On a

$$
\begin{aligned}
P' &= \left[\frac{X^2-1}{2}Q'' - XQ' + Q\right]' \\
&= \left(XQ'' + \frac{X^2-1}{2}Q'''\right) - \left(Q' + XQ''\right) + Q' \\
&= \frac{X^2-1}{2}Q'''
\end{aligned}
$$

Ainsi $P'(1) = \dfrac{1^2-1}{2}Q'''(1) = 0$ et de même $P'(-1) = 0$.

Conclusion : Comme$\mathrm{Im}(\phi) \subset F$ et $\dim \mathrm{Im}(\phi) = \dim(F) = n-1$

on a bien $\mathrm{Im}(\phi) = F$.

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

1. On doit démontrer linéaire et à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$.

   → Classique facile.

   → A valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$?
   Soit $P = P(X) \in Départ = \mathbb{R}_n[X]$

   $$\boxed{\text{On va calculer } \phi(P) \text{ et vérifier que } \phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]}$$

   Comme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on peut écrire $P = P(X) = a_n X^n + ...$

   $$\text{On a alors } \phi(P) = 2\left(X^2+X+1\right)P'(X) - n(2X+1)P(X)$$

   $$= 2\left(X^2+X+1\right)\left[na_nX^{n-1}+....\right] - n(2X+1)\left[a_nX^n+....\right]$$

   $$= X^{n+1}\left[\underbrace{2na_n - 2na_n}_{\neq 0}\right] + ... \in \mathbb{R}_n[X] \text{ Fini.}$$

2. Étude de $\ker\phi$.

   (a) Soit P un polynôme $\neq 0$ de $\mathbb{R}_n[X]$, il a un degré que je note $k_{\leqslant n}$ (Attention n est déjà pris)

   $$\boxed{\text{On va calculer } \phi(P) \text{ et lire son degré}}$$

   On peut écrire $P = P(X) = a_k X^k + ...$ (et $a_k \neq 0$)

   $$\text{On a alors } \phi(P) = 2\left(X^2+X+1\right)P'(X) - n(2X+1)P(X)$$

   $$= 2\left(X^2+X+1\right)\left[ka_kX^{k-1}+....\right] - n(2X+1)\left[a_kX^k+....\right]$$

   $$= X^{k+1}2a_k[k-n] + ...$$

   Donc

   Si $\deg(P) = k \neq n$ alors $\deg\phi(P) = k+1 = \left(\deg P\right)+1$

   Si $\deg(P) = n$ alors $\deg\phi(P) \underset{\text{Strict}}{<} k+1 = \left(\deg P\right)+1$

   (b) Par contraposée.

   → Si $\deg(P) \neq n$, alors $\deg\phi(P) = \left(\deg P\right)+1 \geqslant 0$
   Donc $\phi(P)$ n'est pas le polynôme nul. donc $P \notin \ker\phi$

   (c) Soit P_1 et P_2 deux polynômes non nul dans $\ker\phi$

   → On peut écrire à cause de $2.b$

   $$P_1 = P_1(X) = \alpha X^n + ... \text{ et } \alpha \neq 0$$
   $$P_2 = P_2(X) = \beta X^n + ... \text{ et } \beta \neq 0$$

   On a donc $A(X) = P_1(X) - \dfrac{\alpha}{\beta}P_2() = ... \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$

   → Or $\ker\phi$ est un ssev donc

   $$\left.\begin{array}{c} P_1, P_2 \in \ker\phi \\ \\ \ker\phi \text{ est un ssev} \end{array}\right\} \Rightarrow A = ...P_1 + ...P_2 \in \ker\phi$$

   Ainsi A est un polynôme de $\ker\phi$ et $\deg A \leqslant n-1$, donc forcément $A = 0$ (A cause de 2.b).

   → Conclusion les élément de $\ker\phi$ sont Soit tous nul, Soit tous colinéaires, //, proportionnels
   Conclusion : $\ker\phi$ est soit $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$, soit une droite

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

1. *On connait le théorème de primitivation et c'est une équivalence*

   CàD $h_1' = h_2' \iff$ *il existe une constante K tel que $h_1 = h_2 + K$*

$$\begin{aligned}
\textit{Ainsi on a } h^{(n+1)} = 0 &\iff \textit{il existe une constante } k \textit{ tel que } h^{(n)} = k \quad \textit{C'est un poly de degré} \leqslant 0 \\
&\iff \textit{il existe une constante } k' \textit{ tel que } h^{(n-1)} = kX + k' \quad \textit{C'est un poly de degré} \leqslant 1 \\
&\iff \textit{il existe une constante } k'' \textit{ tel que } h^{(n-2)} = k\frac{X^2}{2} + k'X + k'' \quad \textit{C'est un poly de degré} \leqslant 2 \\
&\quad ...Etc... \text{On primitive} \\
&\iff h = \textit{Polynôme de degré } \leqslant n \\
&\iff h \in \mathbb{R}_n[X]
\end{aligned}$$

2. Facile avec la définition, CàD $\emptyset \in H_n$ et H_n est stable par CL.

3. On sait que $f \in H_n \iff f$ est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} = 0$.

   De plus avec Leibniz, on a

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ [f\,e^x]^{(n+1)} = 0 &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} [f]^{(k)} [e^x]^{(n-k)} = 0 \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} [f]^{(k)} e^x = 0 \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ e^x \left[\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} [f]^{(k)}\right] = 0 \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} [f]^{(k)} = 0 \textit{ car } e^x \textit{ est tjs} \neq 0
\end{aligned}$$

   Donc on a bien $f \in H_n \iff f$ est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} = 0 \iff f$ est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ et $[f\,e^x]^{(n+1)} = 0$.

   On a maintenant

$$\begin{aligned}
f \in H_n &\iff [f\,e^x]^{(n+1)} = 0 \\
&\iff [f\,e^x] \in \mathbb{R}_n[X] \quad \textit{voir préambule.} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ f(x)\,e^x = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \cdots + a_n\,x^n \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a_0\,e^{-x} + a_1\,x\,e^{-x} + a_2\,x^2\,e^{-x} + \cdots + a_n\,x^n\,e^{-x} \\
&\iff f \in vect\left(x^k\,e^{-x}\right)
\end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } H_n = vect\left(\left[x^k\,e^{-x}\right]\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$$

4. La famille $\mathscr{C}_n$ est génératrice de H_n.

   On démontre "facilement" que la famille $\mathscr{C}_n$ est libre avec la définition (*Attention les fonctions f_k ne sont pas des polynômes donc pas de short cut !!!!*)

   Ainsi c'est une base de H_n et $\dim(H_n) = cardinal(Base) = n+1$.

Solution de l'exercice 6 (Énoncé)

1. On obtient, pour $x \in I$,

$$f'(x) = \frac{1+\sin x}{(\cos x)^2}$$
$$f''(x) = \frac{\sin^2 x + 2\sin x + 1}{(\cos x)^3}$$
$$f^{(3)}(x) = \frac{\sin^3 x + 4\sin^2 x + 5\sin x + 2}{(\cos x)^4}$$

2. (a) De la question Q1, on déduit que
$P_1(X) = 1 + X$
$P_2(X) = X^2 + 2X + 1$
$P_3(X) = X^3 + 4X^2 + 5X + 2$

(b) On montre par récurrence.
Initialisation pour n=1 évident

Hérédité On suppose que $H_{<n>}$ est vrai
On a

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}\left[f^{(n)}\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}}\right]$$
$$= \frac{\cos(x)P_n'(\sin x).\cos(x) + (n+1)\sin(x)P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}}$$
$$\frac{(1-\sin^2(x))P_n'(\sin x).+(n+1)\sin(x)P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}}$$
$$= \frac{(1-\square^2)P_n'(\square).+(n+1)\square P_n(\square)}{(\cos x)^{n+2}} \qquad avec\ \square = \sin(x)$$

Donc le polynôme $P_{n+1}(X) = (n+1)XP_n(X) + (1-X^2)P_n'(X)$ convient.

3. On démontre par récurrence que $H_{<n>} : P_n = X^n + \cdots$
Initialisation pour n=1 évident

Hérédité On suppose que $H_{<n>}$ est vrai
On a

$$P_{n+1}(X) = (n+1)XP_n(x) + (1-X^2)P_n'(x)$$
$$= (n+1)X[X^n + \cdots] + (1-X^2)[nX^{n-1} + \cdots]$$
$$= X^{n+1}[(n+1)-n] + \cdots$$
$$= X^{n+1} + \cdots$$

Donc l'hérédité est vraie.

On démontre facilement par récurrence que le polynôme P_n est à coef réel.

4. On démontre par récurrence que $H_{<n>}$:tous les coefficient de P_n sont tous positif.
Initialisation pour n=1 évident car $P_1 = 1 + X$

Hérédité On suppose que $H_{<n>}$ est vrai

$$\boxed{\text{On va montrer } H_{<n+1>}}$$

Comme P_n est de degré n et à coef positif, on a $P_n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_k \geqslant 0$. Ainsi

$$P_{n+1}(X) = (n+1)XP_n(x) + (1-X^2)P_n'(x)$$
$$= (n+1)X\sum_{k=0}^{n} a_k X^k + (1-X^2)\sum_{k=0}^{n} a_k kX^{k-1}$$
$$= (n+1)\sum_{k=0}^{n} a_k X^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} a_k kX^{k-1} - \sum_{k=0}^{n} a_k kX^{k+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{a_k}_{\geqslant 0}\left[\underbrace{(n+1)-k}_{\geqslant 0\ car\ 0 \leqslant k \leqslant n}\right] X^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} \underbrace{a_k k}_{\geqslant 0} X^{k-1}$$

C'est une somme de monôme dont les coef sont tous positif, donc l'hérédité est vraie.

5. Pour $x \in I$, on a

$$1 + f(x)^2 = \frac{\cos^2 x + 1 + 2\sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{2 + 2\sin x}{\cos^2 x} = 2f'(x)$$

6. On constate $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ donc $2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, par la formule de Leibniz,

$$2f^{(n+1)} = (2f')^{(n)} = (f^2+1)^{(n)} = (f^2)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [f]^{(k)} [f]^{(n-k)} .$$

En évaluant en 0, cela donne $2\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution de l'exercice 7 (Énoncé)

1. Montrer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que : $\forall\, n \geqslant 1,\ u_n > 1$

   On montre par récurrence $H_{<n>}$: le nombre u_n se calcule et $u_n > 1$

   Initialisation $n = 1$

   Comme $u_0 = a > 0$, le nombre u_1 se calcule et $u_1 = \sqrt{a} + \dfrac{1}{0+2} = 1 + 0 > 1$

   Hérédité : Facile

2. Montrer que : si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite vaut 1.

   On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$

   Comme $\forall\, n \geqslant 1,\ u_n > 1$, on a $\ell \geqslant 1$ et

$$\left.\begin{array}{r}\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \dfrac{1}{n+1}\\ u_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell\\ \sqrt{u_n} + \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{\ell} + \mathcal{O}\end{array}\right\} \text{À la limite, } \ell = \sqrt{\ell} \implies \ell^2 = \ell \implies \ll = 0 \text{ ou } \ell = 1$$

   Or $\ell \geqslant 1$. Conclusion : la seule possible c'est $\ell = 1$.

3. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

   Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Comme la suite est croissante, on a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant u_1 > 1$.

   Donc la suite ne converge pas vers $\ell = 1$.

   Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans $\mathbb{R}$ (car 1 est la seule limite possible) et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

   Puis montrer qu'il existe N_0 tel que $\forall\, n \geqslant N_0,\ u_{n+1} - u_n < 0$.

   On a $u_{n+1} - u_n = \left(\sqrt{u_n} + \dfrac{1}{n+1}\right) - u_n \underset{n\to\infty}{=} -u_n + o(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$

   En effet comme $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, on a $\dfrac{\sqrt{u_n}}{u_n} = \dfrac{1}{\sqrt{u_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $\dfrac{\frac{1}{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ce ne sont pas des FI

   On applique la définition de $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ avec $B = -1$

   Ainsi il existe un rang N_0 tel que $\forall\, n \geqslant N_0,\ u_{n+1} - u_n \leqslant B = -1 < 0$

   Conclure.

   C'est absurde car on a supposé que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc $\forall\, n,\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$

4. Justifier l'existence d'un entier naturel p tel que $u_{p+1} \leqslant u_p$

   La négation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante CàD de $\forall\, n,\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$

   C'est : Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_{p+1} < u_p$

   Puis démontrer que : $\forall\, n \geqslant p,\ u_{n+1} \leqslant u_n$

   On montre par récurrence (à partir de $n = p$)$H_{<n>} : u_{n+1} \leqslant u_n$

   Initialisation $n = p$

   Fait ci-dessus

   Hérédité : On suppose $H_{<n>}$

   On a : $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \dfrac{1}{n+1} \leqslant \underbrace{\sqrt{u_{n-1}} + \dfrac{1}{n}}_{=u_n}$. Donc $H_{<n+1>}$ est vraie

5. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang p
   et minorée par 1
   et la seule limite possible c'est $\ell = 1$

   donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

Solution de l'exercice 8 (Énoncé)

1. Exemples

   (a) Montrer que le célèbre complexe j est algébrique.

   Comme $1+j+j^2=0$, le complexe j est une racine du polynôme $P=X^2+X+1\in\mathbb{Z}[X]$. Donc le complexe j est algébrique.

   (b) Montrer que le réel $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ est algébrique (plus délicat).

   On note $r=\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

   Ainsi $\sqrt{2}=r-\sqrt{3}$ donc $2=\left(r-\sqrt{3}\right)^2=r^2-2\sqrt{3}r+3$

   Ainsi $\sqrt{3}=\dfrac{r^2+1}{2r}$ donc $3=\left(\dfrac{r^2+1}{2r}\right)^2=\dfrac{r^4+2r^2+1}{4r^2}\implies 3.4r^2=r^4+2r^2+1\implies r^4-10r^2+1=0$

   Conclusion : le nombre r est une racine du polynôme $P=X^4-10X^2+1\in\mathbb{Z}[X]$.

   Donc le nombre r est algébrique.

2. Une minoration utile.

   Soit $P\in\mathbb{Z}[X]$ un polynôme non nul de degré d. On suppose que $r={}^{a}/_{b}\in\mathbb{Q}$ **N'est PAS** une racine de P.

   Montrer que : $\left|P\left(\dfrac{a}{b}\right)\right|\geqslant\dfrac{1}{b^d}$

   Comme $P\in\mathbb{Z}[X]$ un polynôme non nul de degré d, on a $P=\sum_{k=0}^{d}a_kX^k$ avec $a_k\in,\mathbb{Z}$ et $a_d\neq 0$.

   On a

$$\begin{aligned}\left|P\left(\frac{a}{b}\right)\right| &= \left|\,\sum_{k=0}^{d}a_k\left(\frac{a}{b}\right)^k\right|\\ &=\left|a_0+a_1\left(\frac{a}{b}\right)+a_2\left(\frac{a}{b}\right)^2+\cdots+a_d\left(\frac{a}{b}\right)^d\right|\\ &=\left|\frac{a_0b^d+a_1ab^{d-1}+\cdots+a_da^d}{b^d}\right|\\ &=\left|\frac{\sum_{k=0}^{d}a_ka^kb^{d-k}}{b^d}\right|=\left|\frac{Entier}{b^d}\right|=\frac{|Entier|}{b^d}\end{aligned}$$

   De plus $r={}^{a}/_{b}\in\mathbb{Q}$ **N'est PAS** une racine de P

   donc $\left|P\left(\dfrac{a}{b}\right)\right|\neq 0$ donc $|Entier|\neq 0$

   Conclusion $|Entier|$ est un entier strictement positif

   donc $|Entier|\geqslant 1$ et $\left|P\left(\dfrac{a}{b}\right)\right|\geqslant\dfrac{1}{b^d}$

3. Le nombre de Liouville. On considère la suite (S_n) définie par $\forall\, n\in\mathbb{N},\ S_n=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{10^{k!}}$

   (a) Démontrer que la suite (S_n) converge vers une limite noté ℓ comme Liouville

   Comme $\forall\, n\in\mathbb{N},\ S_{n+1}-S_n=\dfrac{1}{10^{(n+1)!}}>0$, la suite (S_n) est croissante

   On a facilement $k!=1.2....k\geqslant 1.1...1.k=k$, ainsi

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{10^{k!}}\leqslant\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\frac{1}{10^k}}_{=\square^k}$$

$$\leqslant\frac{1-\dfrac{1}{10^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{10^1}}\leqslant\frac{1-0}{1-\dfrac{1}{10^1}}=\frac{10}{9}$$

   Conclusion : la suite (S_n) est croissante et majorée par ${}^{10}/_{9}$ donc elle converge

   (b) Soit $n,p\in\mathbb{N}$ avec $0\leqslant n\leqslant p$. Montrer que : $\left|S_p-S_n\right|=\sum_{k=n+1}^{p}\dfrac{1}{10^{k!}}\leqslant\dfrac{10^{-(n+1).n!}-10^{-(p+1).n!}}{1-10^{-n!}}$

Pour tout $k \geqslant (n+1)$, on a $k! = 1.2...n(n+1)(n+2)...k \leqslant 1.2...n.11...1.k = n!.k$, ainsi

$$\begin{aligned} |S_p - S_n| = \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{10^{k!}} &\leqslant \sum_{k=n+1}^{p} \underbrace{\frac{1}{10^{n!.k}}}_{=\square^k} \\ &\leqslant \frac{1-\square^{p+1}}{1-\square} - \frac{1-\square^{n+1}}{1-\square} \\ &\leqslant \frac{\square^{n+1}-\square^{p+1}}{1-\square} = \frac{10^{-(n+1).n!} - 10^{-(p+1).n!}}{1-10^{-n!}} \end{aligned}$$

(c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\ell - S_n| \leqslant \dfrac{1}{10^{n.n!}}$

À la limite quand $p \to \infty$, on obtient

$$|\ell - S_n| \leqslant \frac{10^{-(n+1).n!} - O}{1-10^{-n!}}$$

De plus $\dfrac{1}{10^{n.n!}} - \dfrac{10^{-(n+1).n!} - O}{1-10^{-n!}} = ... \geqslant 0$

4. On va démontrer (avec un RA) que le nombre ℓ est transcendant (Liouville en 1874).
On suppose que ℓ est algébrique, ainsi il existe un polynôme P *non nul à coefficients entiers* tel que $P(\ell) = 0$.
On note d le degré de P.

(a) *On admet qu'il existe une constante K tel que* $\forall t \in \left[\ell - 1, \ell + 1\right]$, $|P'(t)| \leqslant K$

Montrer qu'il existe K' tel que : Si $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ avec $\left|\ell - \dfrac{a}{b}\right| \leqslant 1$, alors on a $\left|\ell - \dfrac{a}{b}\right| \geqslant \dfrac{K}{b^d}$

On suppose que : $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ avec $\left|\ell - \dfrac{a}{b}\right| \leqslant 1$.

Comme P est dérivable et $\forall t \in \left[\ell - 1, \ell + 1\right]$, $|P'(t)| \leqslant K$,

on sait d'après le TAF que $\forall x, x' \in \left[\ell - 1, \ell + 1\right]$, $|P(x) - P(x')| \leqslant K|x - x'|$

On applique avec $x = \ell$ et $x' = a/b$,

$$\text{ainsi } \left|P(\ell) - P\left(\frac{a}{b}\right)\right| \leqslant K\left|\ell - \frac{a}{b}\right|$$

Or on sait que $P(\ell) = 0$ (car ℓ est racine) et $\left|P\left(\dfrac{a}{b}\right)\right| \geqslant \dfrac{1}{b^d}$ (voir question Q2.)

$$\text{Conclusion : } K\left|\ell - \frac{a}{b}\right| \geqslant \left|P\left(\frac{a}{b}\right)\right| \geqslant \frac{1}{b^d}$$

$$\text{D'où le résultat avec } K' = \frac{1}{K}$$

(b) En utilisant Q3c., trouver déduire une absurdité.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{10^{k!}} = \frac{1}{10^{0!}} + \frac{1}{10^{1!}} + \cdots + \frac{1}{10^{n!}} = \frac{Entier}{10^{n!}} \in \mathbb{Q}$$

Comme $|\ell - S_n| \leqslant \dfrac{1}{10^{n.n!}} \leqslant \dfrac{1}{10^0} = 1$

Donc la minoration précédent est valide, ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{K}{\left(10^{n!}\right)^d} \leqslant |\ell - S_n| \leqslant \dfrac{1}{10^{n.n!}} = \dfrac{1}{\left(10^{n!}\right)^n}$

Ceci est absurde car $\left(10^{n!}\right)^d \underset{n\to\infty}{=} o\left(\left(10^{n!}\right)^n\right)$

Ainsi l'hypothèse "le nombre ℓ est algébrique" est absurde
Conclusion le nombre ℓ est transcendant.