

Programme de colle de la semaine 16

du Lundi 03 Février au 07 Février.

Questions de cours et autour du cours.

> Matrice des coordonnées d'un vecteur dans une base.

Démonstration de l'existence *et l'unicité* des coordonnées d'un vecteur dans une base.

Définir la matrice des coordonnées.

Application :

Déterminer la matrice des coordonnées de $P_i = X^i (1 - X)^{n-i}$ dans la base $(X^0, \dots, X^n)$

> Polynôme interpolateur de Lagrange : Base et coordonnée.

Donner la définition (éventuellement sur un exemple) des polynômes interpolateurs de Lagrange.

Justifier que la famille forme une base.

Coordonnée d'un vecteur dans cette base

> Injectivité et noyau.

Définition de : la fonction $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{A}$ est injective.

Soit $\varphi : E \longrightarrow E'$ un morphisme.

Démonstration de : φ est injectif Ssi $\ker(\varphi) = \{\vec{0}\}$

> Injectivité et libre.

Soit $\varphi : E \longrightarrow E'$ un morphisme injectif. Soit $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p\}$ une famille libre.

Montrer que : $(\varphi(\vec{e}_1), \dots, \varphi(\vec{e}_p))$ est une famille libre.

> Image d'une fonction.

Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{A}$ une fonction. Définition et propriétés de $\text{Im}(f)$.

Soit $\varphi : E \longrightarrow E'$ un morphisme. Démonstration de $\text{Im}(f)$ est un ssev de E' .

> Formule du rang.

Soit $\varphi : E \longrightarrow E'$ un morphisme.

Énoncer la formule du rang.

On suppose que $\dim(E) < \dim(E')$. Justifier que φ n'est pas surjectif.

On suppose que $\dim(E) > \dim(E')$. Justifier que φ n'est pas injectif.

> Polynôme interpolateur de Lagrange : morphisme.

On considère $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^4; P \longmapsto \varphi(P) = (P(2), P(3), P(5), P(7))$

Justifier que : φ est un isomorphisme.

Définir et déterminer les polynômes interpolateurs de Lagrange.

Exercices.

Des exercices du type de la banques CCP (et/ou TD) que je joins.

Exercice 1. [Correction] Banque CCP n°59

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$

On considère la fonction f définie par : $\forall P \in E, f(P) = P - P'$.

- Démontrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$, CàD f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Noyaux et injectivité.
 - En utilisant les degrés, déterminer une base et la dimension de $\text{Ker } f$.
 - En utilisant la théorie des équations différentielles, déterminer une base et la dimension de $\text{Ker } f$.
- L'endomorphisme f est-il surjectif?
- Soit $Q \in E$.
 - Justifie qu'il existe un unique $P \in E$ tel que $f(P) = Q$.
 - Déterminer P .

Indication : On sait que $Q = P - P'$. Calculer $Q', Q'', \dots$

Correction inspirée de la correction officielle.

- f est clairement linéaire.
 À valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$
 Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $P = aX^n + \dots$
 Ainsi $f(P) = P - P' = (aX^n + \dots) - (naX^{n-1} + \dots) = aX^n + \dots \in \mathbb{R}_n[X]$
 Conclusion : f est bien un endomorphisme de E .
- (a) Soit P un polynôme $\neq \vec{0}$ de $\text{ker}(f)$
 Ainsi on a $P = \sum_{\substack{\alpha \\ \neq 0}} aX^\alpha + \dots$ et $\alpha \leq n$
 Ainsi on a $f(P) = P - P' = (aX^\alpha + \dots) - (\alpha aX^{\alpha-1} + \dots) = aX^\alpha + \dots$
 Donc $f(P) = \vec{0} \iff aX^\alpha + \dots = \vec{0} \implies a = 0$ OUPS
 Conclusion : Il n'y a pas de vecteur/polynôme $\neq \vec{0}$ dans $\text{ker}(f)$, CàD $\text{ker } f = \{\vec{0}\}$
 Donc f est injectif.
 (b) On a

$$P \in \text{Ker } f \iff P' - P = 0 \text{ et } P \text{ est un polynôme}$$
 On résout l'EDL1

$$\iff \exists K \text{ tq } \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = Ke^x \text{ et } P \text{ est un polynôme}$$
 Or $P(x) = Ke^x$ est un polynôme SSi $K = 0$
 Conclusion : $\text{ker } f = \{\vec{0}\}$ et f est injectif.
- Avec le théorème du rang, on a que f est surjective
 Donc f est bijective.
- Soit $Q \in E$.
 > Comme f est bijective $\exists ! P \in E$, tel que $f(P) = Q$.
 > De plus $P - P' = Q$.

$$P' - P'' = Q'$$

$$P^{(n)} - P^{(n+1)} = Q^{(n)}$$

Or $P^{(n+1)} = 0$ car $P \in \mathbb{R}_n[X]$, donc, en sommant ces $n+1$ égalités, on obtient

$$P = Q + Q' + \dots + Q^{(n)}$$

Exercice 2. [Correction] Banque CCP n°60

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base et la dimension de $\text{Ker } f$.
2. Avec les théorème du rang, déterminer $\dim(\text{Im}(f))$? f est-il surjectif ?
Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
3. Vérifier que : $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \text{vect}\{\emptyset\}$

Correction.

1. On a

$$\begin{aligned}
 M \in \text{ker}(f) &\iff M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ et } f(M) = 0 \\
 &\iff AM = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{pmatrix} a+2b & c+2d \\ 2a+4b & 2c+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} a+2b = 0 \\ c+2d = 0 \end{cases} \\
 &\iff \vec{U} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = b \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{C}_1} + d \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{C}_2} \\
 &\iff M = b \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{M_1} + d \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_2} \\
 &\iff M \in \text{vect}(M_1, M_2)
 \end{aligned}$$

Conclusion :

$\text{ker}(f) = \text{vect}(M_1, M_2)$ ainsi la famille (M_1, M_2) est génératrice de $\text{ker}(f)$

De plus le famille (M_1, M_2) est libre car $\vec{C}_1, \vec{C}_2$ est en escalier

Donc c'est une base de $\text{ker}(f)$ et $\dim(\text{ker}(f)) = 2$

2. Le théorème du rang assure que $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) - \dim(\text{ker}(f)) = 4 - 2 = 2$.

De plus on sait que $\text{Im}(f)$ est contient la famille

$$A = f(E_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = f(E_{21}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, C = f(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, D = f(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

La la famille (A, C) est libre (car non//) dans $\text{Im}(f)$ et $\text{cardinal} = 2 = \dim(\text{Im}(f))$

Donc c'est une base de $\text{Im}(f)$

3. Soit $M \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$.

D'après Q1. et Q2., $\exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $M = aM_1 + bM_2 = \begin{pmatrix} -2a & -2b \\ a & b \end{pmatrix}$ et $M = cA + dC = \begin{pmatrix} c & d \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$.

$$\text{On a donc } \begin{cases} -2a &= c \\ a &= c \\ -2b &= d \\ b &= 2d \end{cases}.$$

On en déduit que $a = b = c = d = 0$. Donc $M = 0$.

Conclusion : $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$.

Exercice 3. Banque CCP n°90

$\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.

Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que $\Phi: \mathbb{K}_2[X] \rightarrow \mathbb{K}^3$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
$$P \mapsto (P(a_1), P(a_2), P(a_3))$$
2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1, 2, 3\}, L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.
 - (a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
 - (b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3 .
3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3) .
4. **Application** : on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0, 1), B(1, 3), C(2, 1)$. Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C .

C'est le cours sur les polynômes interpolateurs de Lagrange

Correction officielle mise en forme.

1. Φ est linéaire (à faire).

Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$ tel que $\Phi(P) = 0$.

Alors $P(a_1) = P(a_2) = P(a_3) = 0$, donc P admet trois racines distinctes.

Or P est de degré inférieur ou égal à 2 ; donc P est nul.

Conclusion : $\text{Ker}(\Phi) = \{0\}$ i.e. Φ est injective.

Enfin, $\dim(\mathbb{K}_2[X]) = \dim(\mathbb{K}^3) = 3$ donc Φ est bijective.

Par conséquent, Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathbb{K}_2[X]$ dans $\mathbb{K}^3$.

2. (a) Φ est un isomorphisme donc l'image réciproque d'une base est une base.

Ainsi, (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

- (b) $L_1 \in \mathbb{K}_2[X]$ et vérifie $\Phi(L_1) = (1, 0, 0)$ i.e. $(L_1(a_1), L_1(a_2), L_1(a_3)) = (1, 0, 0)$.

comme a_2 et a_3 sont distincts, $(X - a_2)(X - a_3) | L_1$.

Or $\deg L_1 \leq 2$, donc $\exists k \in \mathbb{K}$ tel que $L_1 = k(X - a_2)(X - a_3)$.

La valeur $L_1(a_1) = 1$ donne $k = \frac{1}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}$.

$$\text{Donc } L_1 = \frac{(X - a_2)(X - a_3)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}.$$

Un raisonnement analogue donne $L_2 = \frac{(X - a_1)(X - a_3)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)}$ et $L_3 = \frac{(X - a_1)(X - a_2)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}$.

3. Comme (L_1, L_2, L_3) base de $\mathbb{K}_2[X]$ et $P \in \mathbb{K}_2[X]$

donc $\exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que $P = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3$.

On applique en $x = a_j$ ainsi donc $P(a_j) = \lambda_j$.

Conclusion : $P = P(a_1)L_1 + P(a_2)L_2 + P(a_3)L_3$.

4. On choisit $a_1 = 0, a_2 = 1$ et $a_3 = 2$. Ces trois réels sont bien distincts.

On cherche $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $(P(a_1), P(a_2), P(a_3)) = (1, 3, 1)$.

D'après ce qui précède, l'unique solution est le polynôme $P = 1.L_1 + 3.L_2 + 1.L_3$.

$$\text{avec } L_1 = \frac{(X - 1)(X - 2)}{2}, L_2 = \frac{X(X - 2)}{-1} \text{ et } L_3 = \frac{X(X - 1)}{2}.$$

Conclusion : $P = -2X^2 + 4X + 1$.

Exercice 4. Banque CCP n°87 un autre exercice sur les polynômes de Lagrange moins détaillé

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$, $n+1$ réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si $b_0, b_1, \dots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant

$$\deg P \leq n \text{ et } \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_i) = b_i.$$

2. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Expliciter ce polynôme P , que l'on notera L_k , lorsque :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, b_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

3. Prouver que $\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, \sum_{k=0}^n a_k^p L_k = X^p$.

Correction officielle mise en forme.

1. L'application $u : \begin{matrix} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)) \end{matrix}$ est linéaire.

Montrons que $\text{Ker } u = \{0\}$. Si $P \in \text{Ker } u$,

On a $P(a_0) = P(a_1) = \dots = P(a_n) = 0$ et le polynôme P , de degré inférieur ou égal à n , admet $n+1$ racines distinctes.

Donc $P = 0$. Ainsi u est injective

Comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}$, u est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Enfin les conditions recherchées sont équivalentes à : $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $u(P) = (b_0, \dots, b_n)$.

La bijectivité de u dit que ce problème admet une unique solution P et on a $P = u^{-1}((b_0, \dots, b_n))$.

2. Pour ce choix de $b_0, b_1, \dots, b_n$ le polynôme L_k vérifie les conditions :

$$\deg L_k \leq n \text{ et } \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_k(a_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

Comme $a_0, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n$ sont n racines distinctes de L_k qui est de degré $\leq n$,

il existe nécessairement $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $L_k = \lambda \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (X - a_i)$.

La condition supplémentaire $L_k(a_k) = 1$ donne $\lambda = \frac{1}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (a_k - a_i)}$ et finalement : $L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{X - a_i}{a_k - a_i}$

3. Soit $p \in \llbracket 0, \dots, n \rrbracket$.

Les polynômes $\sum_{k=0}^n a_k^p L_k$ et X^p vérifient les mêmes conditions d'interpolation :

$$\deg P \leq n \text{ et } \forall i \in \{0, \dots, n\} \quad P(a_i) = a_i^p$$

Par l'unicité vue en première question, on a $\sum_{k=0}^n a_k^p L_k = X^p$.