TD 18 Morphisme-Dimension

Jeudi 30 Janvier 2025

Exercice 1.

1. Justifier que les fonctions h suivantes sont linéaires et préciser $\mathscr{D}$ et $\mathscr{A}$

$$h : (x, y, z) \longmapsto \begin{pmatrix} -x+z \\ y \end{pmatrix} \qquad \Delta : P \longmapsto P(X+1) - P(X) \qquad h : f \longmapsto \int_{1/2}^{1} f(t)\,dt$$

2. Justifier que les fonctions h NE sont PAS linéaire

$$h(x) = 4x - 3 \qquad h(x, y) = xy$$ *Calculer l'image de $(1,0)$, de $(0,1)$ et de $(1,1)$*

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction f définie par

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X], \quad f(P) = P(X+1) - P(X)$$

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}_{n-1}[X])$, CàD h linéaire et de $\mathbb{R}_n[X]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
2. En utilisant la théorie des polynômes périodique, montrer que : $\dim\Big(\ker(f)\Big) = 1$
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
4. Montrer qu'il existe un polynôme de degré $\leqslant 3$ tel que $P(X+1) - P(X) = X^2$

Exercice 3. On considère la fonction f de $\mathbb{R}_3[X]$ définie par

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_3[X], \quad f(P) = (X-1)P'(X) - 3P(X)$$

1. Montrer que f est linéaire et que f est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer $\ker f$, CàD une base et la dimension de $\ker f$.
3. Déterminer $\mathrm{Im} f$.
4. Application : Résoudre, sur $I =]1, +\infty[$, l'équation différentielle $(x-1)y' - 3y = x^2 + x - 2$

Exercice 4. [Correction] **Banque CCP n°59**

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$

On considère la fonction f définie par : $\forall\, P \in E$, $f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$, CàD f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Noyaux et injectivité.
   (a) En utilisant les degrés, déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker} f$.
   (b) En utilisant la théories des équations différentielle, déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker} f$.
3. L'endomorphisme f est-il surjectif ?
4. Soit $Q \in E$.
   (a) Justifie qu'il existe un unique $P \in E$ tel que $f(P) = Q$.
   (b) Déterminer P.

Indication : On sait que $Q = P - P'$. Calculer Q', Q'',.....

Exercice 5. [Correction] **Banque CCP n°60**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker} f$.
2. Avec les théorème du rang, déterminer $\dim(Im(f))$? f est-il surjectif ?
   Déterminer une base de Imf.
3. Déterminer $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f$

Exercice 6. [Correction] On considère les fonctions f et g

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ f(P) = P' \ et\ g(P) = XP.$$

1. Montrer que f et g sont des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$ et calculer $f \circ g - g \circ f$
2. Étudier l'injectivité de f et de g.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f \circ g^n - g^n \circ f = n\, g^{n-1}$.
   Rappel : $g^n = g \circ g \circ \cdots \circ g$.

Exercice 7. [Correction] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non nulle.
On considère la fonction f définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(M) = M + tr(M)A$$

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}\Big(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\Big)$.
2. On va déterminer $Ker(f)$
   (a) Montrer que : $\ker(f) \subset vect(A)$
   (b) Étudier si $vect(A) \subset \ker(f)$ et conclure que
      Si $tr(A) = -1$ alors $\ker(f) = vect(A)$.
      Si $tr(A) \neq -1$ alors $\ker(f) = \{0\}$.
3. En utilisant le théorème du rang, montrer que la fonction est surjective.
4. On suppose que $tr(A) \neq -1$.

   Montrer que $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe un unique $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que : $C + tr(C)A = B$.

Théorique mais simple.

Exercice 8. [Correction] Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $f, g \in \mathscr{L}(E)$.
On suppose que f et g commutent , CàD $f \circ g = g \circ f$.
Montrer que $\ker(f)$ et Im(f) sont stables par g

Classique et Théorique et plus difficile.

Exercice 9. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ On suppose que :$\forall \overrightarrow{x} \in E,\ f(\overrightarrow{x}) = \lambda_x \overrightarrow{x}$
Montrer que : $\lambda_x = \lambda$ ne dépend pas de $\overrightarrow{x}$.