

DM 15 Morphisme Dimension.

Exercice 1. [Correction] Soit J la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On note $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie par : $\forall \vec{U} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, tel que $f(\vec{U}) = J\vec{U}$

Pour tout vecteur $\vec{t} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on note $\vec{T} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées du vecteur $\vec{t}$.

Partie I Soit $\vec{a} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ et Q l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui sont orthogonaux à $\vec{a}$.

1. Montrer que Q est un plan vectoriel (CàD ssev et $\dim=2$) et que Q est stable par f .
2. On pose $\vec{b} = (1, -1/2, -1/2)$ et $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$.

(a) Vérifier que $(\vec{b}, \vec{c})$ est une base de Q .

(b) Décomposer $f(\vec{b})$ et $f(\vec{c})$ sur les vecteurs $\vec{b}, \vec{c}$.

Trouver un réel θ tel que : $f(\vec{b}) = \cos \theta \vec{b} + \sin \theta \vec{c}$ et $f(\vec{c}) = -\sin \theta \vec{b} + \cos \theta \vec{c}$

(c) Interpréter géométriquement la restriction de f au plan Q .

Partie II On définit ainsi les matrices colonnes à coefficients complexes $\vec{X}_1 = \sqrt{3} \vec{A}$, $\vec{X}_2 = \vec{B} + i \vec{C}$ et $\vec{X}_3 = \vec{B} - i \vec{C}$

De plus on désigne par $P = (\vec{X}_1 | \vec{X}_2 | \vec{X}_3)$ la matrice carré d'ordre 3, qui regroupe les vecteurs $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3$

1. Calculer P en fonction de j et j^2 . Rappel : j est le célèbre complexe..
2. Soit $\bar{P}$ la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de P .
Calculer $P\bar{P}$ en fonction de la matrice I . Que peut-on déduire de ce calcul ?
3. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, calculer $J\vec{X}_i$ en fonction de $\vec{X}_i$.

Exercice 2. [Correction] Soit $n, k \in \mathbb{N}$. On considère les fonctions f_k et g_k définies par

$$f_k : x \mapsto \cos(kx) \quad \text{et} \quad g_n : x \mapsto \cos^k(x)$$

En particulier f_0 et g_0 sont les fonctions constantes égales à 1.

On définit de plus $F_n = \text{vect}(f_0, f_1, \dots, f_n)$ et $G_n = \text{vect}(g_0, g_1, \dots, g_n)$

1. Le cas particulier $n = 2$.

- (a) Démontrer que (f_0, f_1, f_2) est une base de F_2 . En déduire $\dim F_2$.
- (b) Démontrer que (g_0, g_1, g_2) est une base de G_2 . En déduire $\dim G_2$.
- (c) Démontrer que : $F_2 = G_2$

2. Dimension de G_n .

Montrer que la famille $\mathcal{G} = (g_0, g_1, \dots, g_n)$ est une base de G_n et calculer $\dim(G_n)$.

3. L'inclusion $F_n \subset G_n$.

- (a) Pour $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, justifier qu'il existe un polynôme T_k de degré $\leq k$ tel que $\forall \theta, T_k(\cos \theta) = \cos(k\theta)$
- (b) En déduire que : $F_n \subset G_n$

4. Dimension de F_n .

On sait que la famille $\mathcal{G} = (g_0, g_1, \dots, g_n)$ est une base de G_n et que pour $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $f_k \in G_n$,

on note $\vec{U}_k$ le vecteur des coordonnées de f_k dans la base $\mathcal{G}$

- (a) Justifier que le polynôme T_k est de degré k .
- (b) En déduire que la famille $(\vec{U}_0, \dots, \vec{U}_n)$ est libre puis que $\dim(F_n) = n + 1$

5. Conclure que $F_n = G_n$.

Cet exercice propose une nouvelle démonstration du théorème des EDL2.
Il est original (pour la sup) et plutôt différent de d'habitude.

Exercice 3. [Correction] Soit $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions $\mathcal{C}^\infty$ fixés.

On considère l'équation différentielle E .

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + a(x) y'(x) + b(x) y(x) = 0$$

Le but de cet exercice est de décrire les solutions de E .

On suppose qu'il existe deux fonctions f, g telles que

$$\begin{cases} f \text{ est solution de l'équation différentielle et } f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = r \\ g \text{ est solution de l'équation différentielle et } g(0) = 1 \text{ et } g'(0) = r' \\ \text{avec } r \neq r' \end{cases}$$

Soit y une solution l'équation différentielle E

1. Montrer que $\mathbb{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle E est un ssev
2. On définit sur $\mathbb{R}$ la matrice $W(x)$ et le réel $\omega(x)$

$$W(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{pmatrix} \text{ et } \omega(x) = \det[W(x)] \quad \text{note Kulturelle : } W \text{ c'est le Wronskien}$$

- (a) Montrer que ω est solution d'une EDL1.

En déduire une expression de $\omega(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

- (b) Justifier que : $\forall x$, la famille $\left(\begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g(x) \\ g'(x) \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

3. Étude des coordonnées

- (a) Montrer que : $\forall x$, il existe λ_x et μ_x tel que $\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \lambda_x \begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{pmatrix} + \mu_x \begin{pmatrix} g(x) \\ g'(x) \end{pmatrix}$

- (b) Justifier que les fonctions $\lambda : x \mapsto \lambda(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_x$ et $\mu : x \mapsto \mu(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_x$ sont $\mathcal{C}^\infty$.

- (c) Montrer que $\forall x, \lambda'(x) = 0$ et $\mu'(x) = 0$

4. Conclusion

- (a) Déduire des calculs précédents que $y = CL(f, g)$.

- (b) Montrer que (f, g) est une base de $\mathbb{S}$ et ainsi $\dim \mathbb{S} = \text{cardinal}(\text{base}) = 2$

Si on applique ce résultat avec des fonctions constantes a et b et les fonctions $f(t) = e^{rt}$ et $g(t) = e^{r't}$ avec r, r' les solutions de l'équation caractéristique $X^2 + aX + b = 0$

On obtient une nouvelle démonstration du théorème sur les EDL₂

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

Partie I

Soit $\vec{a} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et Q l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui sont orthogonaux à $\vec{a}$.

1. Q est un plan vectoriel ?

$$\text{On a } \vec{u} \in Q \iff \vec{u} \cdot \vec{a} = 0 \iff \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}z = 0 \iff \vec{U} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } Q = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ ainsi } Q \text{ est un plan vectoriel}$$

Q est stable par f ?

On suppose que $\vec{u} = (x, y, z) \in Q$

On doit montrer que $f(\vec{u}) = J\vec{u} \in Q$

À faire.

2. On pose $\vec{b} = \left(1, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$ et $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$.

(a) On trouve que $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \left(0, \frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$(\vec{b}, \vec{c})$ est une base de Q ?

la famille est libre (car $\neq 0$ et non//), dans Q , cardinal=2 et $\dim(Q) = 2$

Donc c'est une base de Q

(b) Décomposer $f(\vec{b})$ et $f(\vec{c})$ sur les vecteurs $\vec{b}, \vec{c}$.

On a

$$f(\vec{b}) = J\vec{b} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } f(\vec{c}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \theta = \frac{2\pi}{3} \text{ convient car } \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2} \text{ et } \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(c) Interpréter géométriquement la restriction de f au plan Q .

On fait un dessin et on constate que f est la rotation d'angle $\theta = \frac{2\pi}{3}$

Partie II

1. Calculer P en fonction de j et j^2 .

$$\text{On a } \vec{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{X}_2 = \vec{B} + i\vec{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix} \text{ et } \vec{X}_3 = \vec{B} - i\vec{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}$$

2. Calculer $P\bar{P}$ en fonction de la matrice I . Que peut-on déduire de ce calcul ?

$$\text{On trouve } P\bar{P} = 3I_3 \text{ Donc } P \text{ est inversible et } P^{-1} = \frac{1}{3}\bar{P}$$

3. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, calculer $J\vec{X}_i$ en fonction de $\vec{X}_i$.

$$\text{On a } J\vec{X}_1 = \vec{X}_1 \text{ et}$$

$$J\vec{X}_2 = \begin{pmatrix} j^2 \\ j \\ 1 \end{pmatrix} = j^2 \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix} = j^2 \vec{X}_2$$

$$\text{et de même } J\vec{X}_3 = j\vec{X}_3.$$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. Le cas particulier $n = 2$.

(a) Démontrer que (f_0, f_1, f_2) est une base de F_2 . En déduire $\dim F_2$.

Comme $F_2 = \text{vect}(f_0, f_1, f_2)$, la famille est génératrice.

Libre? On suppose que : $a f_0 + b f_1 + c f_2 = \mathcal{O}$

On va montrer que $a = b = c = 0$

On a $\forall x \in \mathbb{R}, a + b \cos(x) + c \cos(2x) = 0$

J'applique avec $x = 0, x = \pi/2$ et $x = \pi$

Ainsi $a + b + c = 0, a + 0 - c = 0$ et $a - b + c = 0$

Conclusion : $a = b = c = 0$

Ainsi la famille est libre et génératrice donc c'est une base et $\dim F_2 = 2$.

(b) Démontrer que (g_0, g_1, g_2) est une base de G_2 . En déduire $\dim G_2$.

Comme $G_2 = \text{vect}(g_0, g_1, g_2)$, la famille est génératrice.

Libre? On suppose que : $a g_0 + b g_1 + c g_2 = \mathcal{O}$

On va montrer que $a = b = c = 0$

On a $\forall x \in \mathbb{R}, a + b \cos(x) + c \cos^2(x) = 0$

J'applique avec $x = \pi/2$, ainsi $a = 0$

J'applique avec $x = 0$ et $x = \pi$,

Ainsi $b + c = 0$ et $-b + c = 0$

Conclusion : $a = b = c = 0$

Ainsi la famille est libre et génératrice donc c'est une base et $\dim G_2 = 2$.

(c) Démontrer que : $F_2 = G_2$

On fait que $F_2 \subset G_2$ avec l'optimalité du vect puis que $F_2 = G_2$ avec les dimensions

On sait que G_2 est un ssev. De plus

$> f_0 = g_0 \in G_2$

$> f_1 = g_1 \in G_2$

$> f_2 = \cos(2x) = CC - SS = 2 \cos^2 x - 1 = 2g_2 - g_0 \in G_2$

Ainsi $F_2 = \text{vect}(f_0, f_1, f_2) \subset Ssev = G_2$

On a maintenant $F_2 \subset G_2, \dim(F_2) = 2 = \dim(G_2)$

Conclusion : $F_2 = G_2$

2. Montrer que la famille $\mathcal{G} = (g_0, g_1, \dots, g_n)$ est une base de G_n et calculer $\dim(G_n)$.

La famille est génératrice.

Libre? On suppose que : $\sum_{k=0}^n a_k g_k = \mathcal{O}$.

Pour tout x , on a $\sum_{k=0}^n a_k \underbrace{\cos^k(x)}_{=g_k(x)} = \sum_{k=0}^n a_k X^k = 0$.

À cause de la rigidité des polynômes, on a $\sum_{k=0}^n a_k X^k = \mathcal{O}$

Conclusion : Le polynôme est nul, ses coef sont nuls, la famille est libre.

Ainsi la famille est libre et génératrice donc c'est une base et $\dim G_n = n + 1$.

3. L'inclusion $F_n \subset G_n$.

(a) Pour tout $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, justifier qu'il existe un polynôme T_k de degré $\leq k$ tel que $\forall \theta, T_k(\cos \theta) = \cos(k\theta)$

C'est la "théorie" des polynômes de Chebychev

<i>Théorie/Méthode Directe</i>	<i>Théorie/Méthode par récurrence</i>
On a	On considère la suite de poly (T_n) définie par
$\cos(nx) = \operatorname{Re}((e^{ix})^n)$	$T_0 = 1, T_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$
$\vdots$	On a "facilement" par récurrence que :
$= \sum_{p=0}^{n/2} \binom{n}{2p} (-1)^p (\cos x)^{n-2p} (1 - \cos^2 x)^p$	$\forall n \in \mathbb{N}, T_n(\cos x) = \cos(nx)$
CCL : $T_n = \sum_{p=0}^{n/2} \binom{n}{2p} (-1)^p X^{n-2p} (1 - X^2)^p$ est un po-	CCL : T_n est un polynôme qui convient
lynôme qui convient	

(b) En déduire que : $F_n \subset G_n$

On fait que $F_n \subset G_n$ avec l'optimalité du vect

On sait que G_n est un ssev. De plus

$$> f_0 = g_0 \in G_n$$

$$> f_1 = g_1 \in G_n$$

$$> f_k = \cos(kx) = T_k(\cos x) = CL \in G_n$$

$$\text{Ainsi } F_n = \operatorname{vect}(f_0, f_1, \dots, f_n) \subset \operatorname{Ssev} = G_n$$

4. Dimension de F_n .

(a) Justifier que le polynôme T_k est de degré k .

<i>Théorie/Méthode Directe</i>	<i>Théorie/Méthode par récurrence</i>
Le polynôme $T_n = \sum_{p=0}^{n/2} \binom{n}{2p} (-1)^p X^{n-2p} (1 - X^2)^p$ est	On fait par récurrence T_n est de degré n ,
de degré n !!!!	CàD $H_{<n>} : T_n = \sum_{\substack{a \\ \neq 0}} X^n + \dots$
Ce n'est pas si facile que cela à justifier.	

(b) En déduire que la famille $(\vec{U}_0, \dots, \vec{U}_n)$ est libre puis que $\dim(F_n) = n + 1$

$$\text{Comme } \deg(T_k) = k, \text{ on a } \vec{U}_k = (*_1, \dots, \underbrace{*_k}_{\neq 0}, 0, \dots, 0)$$

$$\text{Ainsi la famille } (\vec{U}_0, \dots, \vec{U}_n) \text{ est en escalier donc libre.}$$

Conclusion : la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est libre, généré donc c'est base donc $\dim F_n = n + 1$

5. Conclure que $F_n = G_n$.

$$\text{On a } F_n \subset G_n \text{ et } \dim F_n = n + 1 = \dim G_n$$

$$\text{Conclusion : } F_n = G_n.$$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. Facile $\vec{0}$ et CL.

2. (a) Montrer que ω est solution d'une EDL1. En déduire une expression de $\omega(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

On a $\omega(x) = \det \begin{bmatrix} W(x) \end{bmatrix} = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$, ainsi

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \omega'(x) &= f'(x)g'(x) + f(x)g''(x) - f''(x)g(x) - f'(x)g'(x) \\ &= f(x)g''(x) - f''(x)g(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or on sait que } f, g \text{ sont solution de } y'' + a(x)y' + b(x)y &= 0 \\ &= f(x) [-a(x)g' - b(x)g] - [-a(x)f' - b(x)f] g(x) \\ &= -a(x) [f(x)g'(x) - f'(x)g(x)] \\ &= -a(x)\omega(x) \end{aligned}$$

Donc ω est solution de l'EDL1 $y' + a(x)y = 0$ et on sait d'après la théorie des EDL1

que $\forall x \in \mathbb{R}, \omega(x) = K \exp(-A(x))$ avec $A(x)$ une primitive de $a(x)$

Enfin pour $\omega(0) = r' - r$, donc $K = (r' - r) \exp(A(0)) \neq 0$

(b) Justifier que : $\forall x$, la famille $\left(\begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g(x) \\ g'(x) \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Pour tout : $\forall x, \det(W(x)) = \omega(x) = K \exp(-A(x)) \neq 0$,

donc la matrice $W(x)$ est inversible ou bien la famille $\left(\begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g(x) \\ g'(x) \end{pmatrix} \right)$ est libre.

3. Étude des coordonnées

(a) Montrer que : $\forall x$, il existe λ_x et μ_x tel que

La famille $\left(\begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g(x) \\ g'(x) \end{pmatrix} \right)$ est libre dans $\mathbb{R}^2$ et cardinal=2 et $\dim \mathbb{R}^2 = 2$. Donc c'est une base.

De plus Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$,

donc il existe λ_x et μ_x tel que $\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \lambda_x \begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{pmatrix} + \mu_x \begin{pmatrix} g(x) \\ g'(x) \end{pmatrix}$

(b) Justifier que les fonction $\lambda : x \mapsto \lambda(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_x$ et $\mu : x \mapsto \mu(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_x$ sont $\mathcal{C}^\infty$.

On va expliciter λ_x et μ_x . On a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} &= \lambda_x \begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{pmatrix} + \mu_x \begin{pmatrix} g(x) \\ g'(x) \end{pmatrix} \\ \iff \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{pmatrix}}_{=W(x)} \begin{pmatrix} \lambda_x \\ \mu_x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comme $\det(W(x)) = \omega(x) \neq 0$, la matrice $W(x)$ est inversible et $W(x)^{-1} = \frac{1}{\omega(x)} \begin{pmatrix} g'(x) & -g(x) \\ -f'(x) & f(x) \end{pmatrix}$

$$\text{Conclusion : } \begin{pmatrix} \lambda_x \\ \mu_x \end{pmatrix} = W(x)^{-1} \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix},$$

CàD λ_x, μ_x s'exprime à l'aide de fonction $\mathcal{C}^\infty$ donc λ_x, μ_x sont $\mathcal{C}^\infty$

(c) Montrer que $\forall x, \lambda'(x) = 0$ et $\mu'(x) = 0$

$$\text{On dérive l'égalité } \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \lambda_x \begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{pmatrix} + \mu_x \begin{pmatrix} g(x) \\ g'(x) \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi on a : } \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} = \lambda'_x \begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{pmatrix} + \lambda_x \begin{pmatrix} f'(x) \\ f''(x) \end{pmatrix} + \mu'_x \begin{pmatrix} g(x) \\ g'(x) \end{pmatrix} + \mu_x \begin{pmatrix} g'(x) \\ g''(x) \end{pmatrix}$$

> On utilise $y'' = -ay' - by$ et $f'' = -af' - bf$ et $g'' = -ag' - bg$, ainsi

$$\begin{pmatrix} y' \\ -ay' - by \end{pmatrix} = \lambda'_x \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} + \lambda_x \begin{pmatrix} f' \\ -af' - bf \end{pmatrix} + \mu'_x \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix} + \mu_x \begin{pmatrix} g' \\ -ag' - bg \end{pmatrix}$$

> Or on sait que : $y = \lambda_x f + \mu_x g$ et $y' = \lambda_x f' + \mu_x g'$, donc il reste

$$\begin{pmatrix} y' \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda'_x \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} + \lambda_x \begin{pmatrix} f' \\ 0 \end{pmatrix} + \mu'_x \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix} + \mu_x \begin{pmatrix} g' \\ 0 \end{pmatrix}$$

> Or on sait que : $y' = \lambda_x f' + \mu_x g'$, donc il reste

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda'_x \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} + \lambda_x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu'_x \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix} + \mu_x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Conclusion : } \lambda'_x \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} + \mu'_x \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et la famille } \left(\begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix} \right) \text{ est libre}$$

$$\text{Ainsi } \lambda'_x = \mu'_x = 0$$

4. Conclusion

(a) Dédire des calculs précédent que $y = CL(f, g)$.

Comme $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) = 0$ on a que : λ est une constante, CàD $\lambda_x = \lambda$.

De même μ est une constante, CàD $\mu_x = \mu$.

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$, CàD $y = \lambda f + \mu g = CL(f, g)$.

(b) Montrer que (f, g) est une base de $\mathbb{S}$ et ainsi $\dim \mathbb{S} = \text{cardinal}(\text{base}) = 2$

Conclusion : la famille (f, g) libre (car $\neq 0$ et non //) dans $\mathbb{S}$ et génératrice

Donc c'est une base de $\mathbb{S}$ et ainsi $\dim \mathbb{S} = \text{cardinal}(\text{base}) = 2$