Programme de colle de la semaine 17

du Lundi 10 Février au Vendredi 14 Février.

Questions de cours et autour du cours.

> Stable. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $f, g \in \mathscr{L}(E)$ avec $f \circ g = g \circ f$.

Montrer que $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont stables par g

> Noyau et Image itérée. Soit h un endomorphisme de E.

> Définir K_p et I_p.

> Démontrer $K_p \subset K_{p+1}$ et $I_{p+1} \subset I_p$.

> Somme Direct.

Définition de : La somme de $F \oplus G = E$.

Démonstration de : $F \cap G = \{\overrightarrow{0}\} \iff \mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G$ est une famille libre de E.

> Supplémentaire d'un hyperplan.

Définition et propriétés des hyperplans.

On suppose que $\overrightarrow{A} \notin H$. Montrer que : $H \oplus vect(\overrightarrow{A}) = E$ avec .

> Projection dans $\mathbb{R}^3$. On considère P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et la droite D d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$

> Vérifier que D est une droite et déterminer une base de D.

> Déterminer l'expression de $p(\overrightarrow{u}) = (x', y, z')$ la projection sur le plan P et parallèlement à la droite D en fonction de $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$

> Éléments géométriques. Soit la fonction : $p : \overrightarrow{U} \longmapsto A\overrightarrow{U}$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Montrer p est un projecteur de $\mathbb{R}^3$, CàD endo et $p \circ p = p$.

Déterminer les éléments géométriques associés à p.

Exercices

Des sommes, des symétrie/projection.

ET Des calculs de DL, de tangente, d'asymptote,.....

Exercice 1. On considère dans $\mathbb{R}^3$.

$$F = vect((2,1,-2)) \quad et \quad G = \left\{\overrightarrow{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z=0\right\}.$$

1. Déterminer les dimensions de F et G.
2. Déterminer $F \cap G$. En déduire que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
3. En utilisant les bases, montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

Correction.

1. On facilement que $\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est une base de F

   et $\overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de G

2. On suppose que $\overrightarrow{u} = (x,y,z) \in (F \cap G)$

   $>$ Comme $\overrightarrow{u} \in F$, on a $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{a}$, CàD $\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, donc $x = 2\alpha$, $y = \alpha$ et $z = -2\alpha$

   $>$ De plus $\overrightarrow{u} \in G$, donc $x+y+z=0$

   Ainsi $(2\alpha)+\alpha+(-2\alpha) = \alpha = 0$ et $\overrightarrow{u} = 0\overrightarrow{a} = \overrightarrow{O}$.

   $\boxed{\text{CCL : } F \cap G = \{\overrightarrow{O}\} \text{ et la somme est directe.}}$

   De plus avec Grassmann, on a $\dim(F+G) = \cdots = 3$. De plus $F+G$ est un ssev de $\mathbb{R}^3$

   Conclusion : $F+G = \mathbb{R}^3$ et comme la somme est directe $F \oplus G = \mathbb{R}^3$

3. En utilisant les bases, montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

   On réunit $\mathscr{B}_F = \{\overrightarrow{a}\}$ et $\mathscr{B}_G = \{\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$

   La famille $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$ est dans $\mathbb{R}^3$ et libre (car $\det\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right) = \cdots \neq 0$)

   De plus cardinal=3 et $\dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3$

   Conclusion : C'est une base de $\mathbb{R}^3$, ainsi on a $F \oplus G = \mathbb{R}^3$

Exercice 2. Soit La matrice
$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

On considère la fonction f définie par : $\forall \overrightarrow{U}\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ f(\overrightarrow{U})=A\overrightarrow{U}$, c'est la fonction associée à la matrice A.

On considère les ensembles $E_3=\ker(f-3\,id)\quad et\quad E_{-3}=\ker(f+3\,id)$

1. Montrer que E_{-3} et E_3 sont des ssev, et déterminer une base et la dimension de chacun.
2. Montrer que $E_{-3}\oplus E_3=\mathbb{R}^3$.
3. En déduire une méthode pour calculer $f^n(\overrightarrow{U})=[f\circ f\circ\cdots\circ f](\overrightarrow{U})$.

Correction.

1. On facilement que $\overrightarrow{A}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{B}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ est une base de E_{-3}

   et $\overrightarrow{C}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est une base de E_3

2. En utilisant les bases, on va montrer que : $E_{-3}\oplus E_3=\mathbb{R}^3$.

   On réunit $\mathscr{B}_{E_{-3}}=\{\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\}$ et $\mathscr{B}_{E_3}=\{\overrightarrow{c}\}$

   La famille $\{\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\}$ est dans $\mathbb{R}^3$ et libre (car $\det\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\right)=\cdots\neq 0$)

   De plus cardinal=3 et $\dim\left(\mathbb{R}^3\right)=3$

   Conclusion : C'est une base de $\mathbb{R}^3$, ainsi on a $E_{-3}\oplus E_3=\mathbb{R}^3$.

3. En déduire une méthode pour calculer $f^n(\overrightarrow{U})=[f\circ f\circ\cdots\circ f](\overrightarrow{U})$.

   Comme $\overrightarrow{u}\in\mathbb{R}^3$ et $\{\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\}$ est un base, ainsi on peut écrire $\overrightarrow{u}=\alpha\overrightarrow{a}+\beta\overrightarrow{b}+\gamma\overrightarrow{c}$

   De plus $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\in E_{-3}$ donc $f^n(\overrightarrow{a})=(-3)^n\overrightarrow{a}$ et $f^n(\overrightarrow{b})=(-3)^n\overrightarrow{b}$

   Et $\overrightarrow{c}\in E_{-3}$ donc $f^n(\overrightarrow{c})=3^n\overrightarrow{c}$

   Conclusion :
   $$\begin{aligned} f^n(\overrightarrow{u}) &= f\left(\alpha\overrightarrow{a}+\beta\overrightarrow{b}+\gamma\overrightarrow{c}\right)\\ &=\alpha f^n(\overrightarrow{a})+\beta f^n(\overrightarrow{b})+\gamma f^n(\overrightarrow{c})\\ &=\alpha(-3)^n\overrightarrow{a}+\beta(-3)^n\overrightarrow{b}+\gamma 3^n\overrightarrow{c}\end{aligned}$$