Programme de colle de la semaine 18

du Lundi 17 Février au Vendredi 21 Février.

Questions de cours et autour du cours.

> Formule de Taylor-Young.

Énoncer le théorème de Taylor-Young.

Application : Avec la formule de Taylor-Young, démontrer : $\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$

> Somme géo et DL.

En utilisant les sommes géo, démontrer que : $\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + o(x^2)$ ou $\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$

Puis en déduire que : $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

> DL de tan.

Énoncer le théorème de primitivation des DL.

Déterminer le DL de $\tan(x)$ en $x = 0$ avec 3 termes.

> Primitivation des DL.

Énoncer le théorème de primitivation des DL.

Application : Déterminer le DL de arccos en $x = 0$

> DL de $\sqrt{1+x}$.

Donner le DL $(1+x)^\alpha$, calculer, l'aide de factoriel, $\prod_{\substack{k=1\\k\ tous}}^{n} k$, $\prod_{\substack{k=1\\k\ pair}}^{n} k$ et $\prod_{\substack{k=1\\k\ impair}}^{n} k$. En déduire de $\alpha(\alpha-1)\dots\Big(\alpha-(n-1)\Big)$ avec $\alpha = {}^1/_2$

> DL de $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Donner le DL $(1+x)^\alpha$, calculer, l'aide de factoriel, $\prod_{\substack{k=1\\k\ tous}}^{n} k$, $\prod_{\substack{k=1\\k\ pair}}^{n} k$ et $\prod_{\substack{k=1\\k\ impair}}^{n} k$. En déduire de $\alpha(\alpha-1)\dots\Big(\alpha-(n-1)\Big)$ avec $\alpha = {}^{-1}/_2$

> Série.

Définition de la série $\sum u_n$ converge.

Démontrer que : Lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge.

> Série Géométrique.

Définition de la série $\sum u_n$ converge

Montrer que la série $\sum q^n$ Ssi $q \in]-1,1[$ et calcul de $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$.

> La suite Harmonique. On considère la suite (H_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

1. Étudier la monotonie de la suite. Que peut-on conclure ?
2. Montrer $\forall\, n \geqslant 1$, $H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$.
3. En déduire que la suite ne converge pas dans $\mathbb{R}$. Conclusion la série $\sum {}^1/_n$ diverge.

> La suite Harmonique. On considère la suite (H_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

1. Montrer que : il existe N_0 tel que $\forall\, k \geqslant N_0$, $\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2}[\ln(k+1) - \ln(k)]$
2. En déduire que : la série $\sum {}^1/_n$ diverge.

> Lundi La suite Harmonique. On considère la suite (H_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

À l'aide d'une comparaison Somme/Intégrale, montrer que : la série $\sum {}^1/_n$ diverge.

Exercices

Des calculs de DL, des tangente, des asymptote, des signes,.....

Des séries : Attention je fais le théorème de Riemann lundi ou mardi