DM 17 DL.

Banque CCP

Pour le groupe de TD 16h-18h
et ceux qui n'ont pas abordé ces exos, CàD Nivet, Chassaing, Nouaille, Rose, Trégoat, Batiste,....

Exercice 1. [Correction] **D'après Exo N°6** Déterminer 2 termes dans le développement de $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

Application : Déterminer un équivalent de $\dfrac{\left(\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$

Exercice 2. **D'après Exo N°1** Déterminer le DL de $\sinh$ et $\tan$

Application Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n = \mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 3. **D'après Exo N°51** On rappelle que : $n! \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$ (formule de Stirling).

Pour $n\in\mathbb{N}$, déterminer un équivalent $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$

Exercice 4. **D'après Exo N°45**

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire le développement de $\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

Sympa

Pour le groupe de TD 14h-16h dont Nivet, Chassaing, Nouaille, Rose, Trégoat, Batiste,....
et ceux que cela motive.

Exercice 5. [Correction] On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 \in]0,1] \quad \text{et} \quad \forall\, n,\ u_{n+1} = \sin(u_n).$$

1. En utilisant la théorie des suites $u_{n+1} = f(u_n)$,
   montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. On considère la suite (v_n) définie par : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ v_n = (u_{n+1})^\alpha - (u_n)^\alpha$
   (a) On remarque que $v_n = (u_{n+1})^\alpha - (u_n)^\alpha = (\sin u_n)^\alpha - (u_n)^\alpha = \sin(\square) - \square$ avec $\square = u_n$.
   Faites un DL quand $n\to\infty$
   (b) Discuter en fonction de α si la suite (v_n) converge vers $\ell = 0$, $\ell \neq 0$ ou $\ell = \infty$
   (c) On choisit la valeur de $\alpha = -2$, ainsi la suite (v_n) converge vers $1/3 \neq 0$
   > Énoncer le thm de Cesàro, En déduire que : $\dfrac{v_0+v_1+\ldots+v_{n-1}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1/3$
   > En déduire un équivalent du nombre u_n quand $n\to+\infty$