Développement limité.

1 Dominée, négligeable et équivalent. 1
1.1 Dominée, négligeable et équivalent. 1
1.2 Exercices 3

2 Les DL. 4
2.1 Existence et DL classiques. 4
2.2 Troncature, Unicité, Parité. 6
2.3 Primitiver un DL. 7

3 Interpréter/utiliser les DL. 8
3.1 Interprétation géométrique. 8
3.2 Transfert de propriétés. 9

4 Exercices 9

1 Dominée, négligeable et équivalent.

1.1 Dominée, négligeable et équivalent.

Définition 1. Petit "o", Grand "O"

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. *On suppose que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang.*

> On dit que le nombre u_n est **négligeable** devant v_n quand n tend vers ∞

$$Ssi \quad Quotient = \frac{Petit}{Gros} = \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

On note alors $u_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n)$ *et on dit que :* u_n *est un petit "o" de* v_n.

> On dit que le nombre u_n est **dominé** par le nombre v_n quand n tend vers ∞

$$Ssi \quad Quotient = \frac{Petit}{Gros} \text{ est majoré}_{\text{à partir d'un certain rang}} \iff \left| \begin{array}{l} \text{il existe } K \text{ et } N_0 \text{ tel que} \\ \forall\, n \geqslant N_0,\ |u_n| \leqslant K\,|v_n| \end{array} \right.$$

On note alors $u_n \underset{n\to\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ *et on dit que :* u_n *est un grand "O" de* v_n.

L'axe de hiérarchie

petit ________________________________ Gros

> $u_n = o(v_n) \iff u_n$ se situe à une position **strictement** inférieur à celle de v_n.

> $u_n = \mathcal{O}(v_n) \iff u_n$ se situe à une position **inférieur ou égale** à celle de v_n.

Remarque : u_n *se situe à la même position que* $v_n \not\Longleftrightarrow u_n \sim v_n$

Définition 2. Équivalent, Partie Principale

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. *On suppose que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang.*

> On dit que le nombre u_n est **équivalente** à v_n quand n tend vers ∞

$$Ssi \quad Quotient = \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

On note alors $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ et on dit que : le nombre u_n est équivalent à v_n.

On n'est jamais équivalent à 0 ou à ∞

$$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \iff u_n \underset{n\to\infty}{=} \ell + o(1)$$

$$\iff u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ell \text{ Lorsque } \ell \neq 0 \text{ et } \ell \neq \infty$$

Lorsque $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ou ∞ alors le nombre u_n se rapproche de 0 ou ∞ avec une certaine vitesse *et l'équivalent mesure cette vitesse.*

> La partie principale d'une expression est un équivalent *normalisée*, CàD

Un équivalent de la forme $\quad K.(\ln x)^a.x^b.e^{cx} \quad$ *OU* $\quad K.(\ln n)^a.n^b.r^n$

Théorème 3. Formulaire sur les petits "o", grands "O" et 1+o(1)

$o(1)$ **c'est un TRUC qui tend vers 0.**

> Les produit se "regroupent",
CàD $x\,o(x^2) = o(x^3) = x^3\,o(1)$ ou $o(x^3)\,o(x^2) = o(x^5)$

> Sinon on "garde" le plus gros

$$2\,o(x^2) - 3\,o(x^3) \underset{x\to0}{=} o(x^2) \quad \text{et} \quad 2\,o(x^2) - 3\,o(x^3) \underset{x\to\infty}{=} o(x^3)$$

$$o\left(x^2 + +x^3 + o(x^2)\right) \underset{x\to0}{=} o(x^2)$$

> Attention : $\dfrac{o(truc)}{o(machin)}$ C'est une FI!!!!!

$\mathcal{O}(1)$ **c'est un truc borné.**

Le formulaire est le même que pour le petit "o".

$[1+o(1)]$ **c'est un TRUC qui tend vers 1.**

> $\dfrac{[1+o(1)][1+o(1)]}{[1+o(1)]} = [1+o(1)]$

> $[1+o(1)]^3 = [1+o(1)]$

> $\ln\left([1+o(1)]\right) = o(1)$

> $e^{[1+o(1)]} = e^1 \underbrace{e^{o(1)}}_{\to e^0=1} = e\,[1+o(1)]$

$$u_n = v_n[1+o(1)] \iff u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$$

La formule de Stirling : $n! \underset{n\to\infty}{=} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi\,n}\left[1+o(1)\right] \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi\,n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

1.2 Exercices

Exercice 1.

1. Réécrire les sommes en les ordonnant par ordre décroissante de domination,

$$\text{CàD (Le plus gros) + (le 2+ième plus gros)+.....}$$

> $\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{\ln n}{n\sqrt{n}}+1+\dfrac{\sqrt{n}}{n^2}=$

> $n+n(\ln n)^2+\dfrac{n}{\sqrt{n}}+n^2\sqrt{\ln n}+n^2\ln n+o\left(\sqrt{n}\right)=$

> $\ln(n)+\ln(n^2)+\ln(\dfrac{1}{\sqrt{n}})+(\ln n)^2=$

2. On suppose que $x\to 0$. Réécrire les sommes en les ordonnant par ordre décroissante de domination.

> $\dfrac{1}{x^2}+\ln x+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)+3+x+\dfrac{1}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)=$

> $x+x\ln x+o\left(x^2\ln x\right)+x^2+o\left(x^2\right)=$

3. On suppose que $x\to+\infty$. Réécrire les sommes en les ordonnant par ordre décroissante de domination.

> $\dfrac{1}{x^2}+\ln x+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)+3+x+\dfrac{1}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)=$

> $x+x\ln x+o\left(x^2\ln x\right)+x^2+o\left(x^2\right)=$

Exercice 2. Déterminer le petit "o" final.

$$o\left(\frac{n}{2^n}\right)-2\,o\left(\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\right)+3\,o\left(\frac{\sqrt{n}}{n^2}\right)=$$

$$o(\ln n)-\frac{1}{2}o(\ln^2 n)+o(\ln(n^2))=$$

$$x\,o(x^2)+o(\sqrt{x})\,o(x^2)+e^{2x}\,o(1)=\begin{cases}\textit{Quand } x\to 0 & =\\ \textit{Quand } x\to+\infty & =\\ \textit{Quand } x\to-\infty & =\end{cases}$$

Exercice 3. [Correction] Déterminer un équivalent pour chacune des expressions suivantes

$$2^n\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right),\quad \frac{\ln(2n^2+n+1)}{\ln(2n^3+3)},\quad \frac{\sin\left(1/\sqrt{2n}\right)}{\arctan\left(2/n\right)},\quad \frac{\ln(2^n+3^n)}{\sqrt{2n^2+n+1}}$$

Exercice 4. [Correction] Déterminer un équivalent de

$$f(x)=2^x \text{ en } x_0=0,\ x_0=+\infty,\ x_0=-\infty,\ x_0=1 \text{ et plus généralement en } x_0=a.$$

Exercice 5. [Correction] Déterminer un équivalent pour les expressions suivantes puis donner la limite

$\dfrac{n(n+1)}{2} \sim$ | $\dfrac{n^3+2n^2-n}{(n+1)(n^2-n)} \sim$ | $\dfrac{\ln(n^4+1)}{n+1} \sim$

$\dfrac{4x^3-x^2-x}{(2x+1)(x^2-x)} \underset{x\to 0}{\sim}$ | $\dfrac{4x^3-x^2-x}{(2x+1)(x^2-x)} \underset{x\to\infty}{\sim}$ | $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \underset{x\to 0}{\sim}$

$2^n \sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim}$ | $\dfrac{n^2\ln(1+{}^1/_n)}{\tan({}^\pi/_n)} \underset{n\to\infty}{\sim}$

$\ln(1+e^x) \underset{x\to+\infty}{\sim}$ | $\ln(1+e^x) \underset{x\to 0}{\sim}$ | $\ln(1+e^x) \underset{x\to-\infty}{\sim}$

$\sqrt{\dfrac{(1-\ln x)(x+2)}{(1-x)\ln(1+x)}} \underset{x\to 0^+}{\sim}$ | $\ln(1+x)+\sin(x) \underset{x\to+\infty}{\sim}$ | $\ln(1+x)+\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim}$

$\dfrac{\ln(x^7+\sqrt[5]{x})}{x^2+1} \underset{x\to+\infty}{\sim}$ | $\dfrac{\ln(x^7+\sqrt[5]{x})}{x^2+1} \underset{x\to 0^+}{\sim}$ | $\ln(n+1)-\ln(n) \underset{n\to\infty}{\sim}$

Exercice 6. [Correction] Pour $n\in\mathbb{N}$, on considère $u_n = \dbinom{2n}{n}$

En utilisant la formule de Stirling, déterminer la partie principale de u_n

2 Les DL.

2.1 Existence et DL classiques.

Définition 4.
Soit f une fonction définie au voisinage de 0, CàD sur $]-a,a[$ avec $a>0$.

On dit que f est admet un $DL_n(0)$, CàD un développement limité à l'ordre n en 0

Ssi il existe des constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tel que

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + o(x^n)$$

Vocabulaire : Dans un développement limité (DL), *les puissances sont des entiers positifs*,
sinon cela s'appelle un développement asymptotique (DA)

Exemple et interprétation : On a $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + o\left(x^2\right)$

Cela signifie qu'autour de 0 et avec une précision, un grossissement, une pixelisation égale à x^2,

il n'y a pas de différence "mesurable" entre e^x et $1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}$

MAIS on sait que e^x et $1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}$ ce n'est pas égale

Théorème 5. Le théorème de Taylor-Young sur l'existence des DL.

Soit f une fonction $\mathscr{C}^{\infty}$ de $[-A, A]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

alors la fonction f admet un développement limité d'ordre n en 0.

De plus le DL est de la forme $h(x) \underset{x\to 0}{=} h(0)+h'(0)x+h''(0)\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+h^{(n)}(0)\dfrac{x^n}{n!}+0(x^n)$

C'est le théorème de Taylor-Young

Voici les développements limités des fonctions classiques en 0 à l'ordre n, CàD les $DL_n(0)$.

$$\exp(x) \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)+\text{ou plus longue....}$$

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+o\left(x^7\right)+........$$

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o\left(x^6\right)+........$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1-x+x^2-x^3+0\left(x^3\right)+........$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+0\left(x^4\right)+....$$

$$(1+x)^{\alpha} \underset{x\to 0}{=} 1+\alpha x+\underbrace{\alpha(\alpha-1)}_{\text{2 termes}}\frac{x^2}{2!}+\underbrace{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}_{\text{3 termes}}\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)+....$$

Complément-Remarque :

Comme la fonction f est supposé $\mathscr{C}^{\infty}$, le DL est encore valide mais avec à $\mathscr{O}(x^{n+1})$.

Démonstration. Pour chaque fonction h : on calcule $h^{(k)}$ puis $h^{(k)}(0)$ et on utilise la formule

$$h(x) \underset{x\to 0}{=} h(0)+h'(0)x+h''(0)\frac{x^2}{2!}+\cdots+h^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

Pour la fonction $h(x)=e^x$.

On sait que : $\forall\, k\in\mathbb{N}, x,\ h^{(k)}(x)=e^x$

ainsi $\forall\, k\in\mathbb{N},\ h^{(k)}(0)=1.$

Pour la fonction $h(x)=\cos(x)$.

On sait que : $\forall\, k\in\mathbb{N}, x,\ h^{(k)}(x)=\pm\sin(x)\ ou\ \pm\cos(x)$

ainsi $\forall\, k\in\mathbb{N},\ h^{(2k)}(0)=(-1)^k\ et\ h^{(2k+1)}(0)=0.$

Pour la fonction $h(x)=\sin(x)$.

On sait que : $\forall\, k\in\mathbb{N}, x,\ h^{(k)}(x)=\pm\sin(x)\ ou\ \pm\cos(x)$

ainsi $\forall\, k\in\mathbb{N},\ h^{(2k)}(0)=0\ et\ h^{(2k+1)}(0)=(-1)^k.$

Pour la fonction $h(x)=\dfrac{1}{1+x}$.

On sait que : $\forall\, k\in\mathbb{N}, x,\ h^{(k)}(x)=\dfrac{(-1)^k\,k!}{(1+x)^{k+1}}$

ainsi $\forall\, k\in\mathbb{N},\ h^{(k)}(0)=(-1)^k\,k!.$

Pour la fonction $h(x) = \ln(1+x)$.

On sait que : $\forall\, k \geqslant 1, \forall\, x,\ h^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^{k+1}}$

ainsi $\forall\, k \geqslant 1,\ h^k(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$.

Pour la fonction $h(x) = (1+x)^\alpha$.

On sait que : $\forall\, k \geqslant 1, \forall\, x,\ h^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$

ainsi $\forall\, k \geqslant 1,\ h^k(0) = \underbrace{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}_{k\ facteurs}$.

2.2 Troncature, Unicité, Parité.

Théorème 6.

On suppose que la fonction f a un $DL_n(0)$ de la forme $f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o(x^n)$

> Alors on peut tronquer le DL,
CàD on a aussi $f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o(x^2)$

> Alors il y a unicité des coefficients du DL.

> On suppose que la fonction f est paire (resp. impaire).
Alors le DL ne contient que des monômes pairs (resp. impairs).

Démonstration :

> C'est facile car $x^3 = o(x^2)$ donc $a_3 x^3 = o(x^2)$, ainsi $a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} o(x^2) + o(x^2) + \ldots. + o(x^2) = o(x^2)$

Conclusion : $f(x) \quad = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + o(x^n) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o(x^2)$

> On suppose que $f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + o(x^n)$ et $f(x) \underset{x\to 0}{=} b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + o(x^n)$.

$$\boxed{\text{On va montrer : } \forall\, k \in \{0, 1, \ldots, n\},\ a_k = b_k}$$

On utilise l'unicité de la limite

> Avec le premier DL, on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = a_0$ et avec le second DL, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = b_0$
Par unicité de la limite, on a $a_0 = b_0 = a$.

> On poursuit,

$$\frac{f(x)-a}{x} \quad = \frac{[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + o(x^n)] - a_0}{x} = a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1} + o(x^{n-1}) \xrightarrow[x\to 0]{} a_1$$

On fait le même calcul avec l'autre DL et on trouve $\dfrac{f(x)-a}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} b_1$

Par unicité de la limite, on a $a_1 = b_1$.

> On recommence avec $\dfrac{f(x) - (a_0 + a_1 x)}{x^2}$ .....etc.....

> On suppose que la fonction f est paire, ainsi $\forall\, x,\ f(-x) = f(x)$
On dérive k fois l'égalité ainsi $\forall\, x,\ (-1)^k f^{(k)}(-x) = f^{(k)}(x)$.
On applique en $x = 0$ ainsi $(-1)^k f^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$ et on discute

Lorsque k est impair, CàD ...... Ainsi $f^{(k)}(0) = f^{(2a+1)}(0) = 0$

Donc il n'y a pas de monôme impair

Exemples

> La fonction Sinus est impaire et on a bien : $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \mathcal{O}\left(x^9\right)$

> La fonction Cosinus est paire et on a bien : $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}\left(x^8\right)$

> La fonction Cosinus hyperbolique est paire et on a bien :

$$\begin{aligned}\cosh(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{e^x+e^{-x}}{2} &= \frac{1}{2}\left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \mathcal{O}(x^5)\right] + \\ &+ \frac{1}{2}\left[1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \frac{(-x)^4}{4!} + \mathcal{O}((-x)^5)\right] \\ &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \mathcal{O}(x^5)\end{aligned}$$

2.3 Primitiver un DL.

Théorème 7. Le théorème de primitivations des DL

Soit f une fonction de $[-a,a]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$
On suppose que

$$\left.\begin{array}{r} f \textit{ est continue sur [-a,a]} \\ f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \mathcal{O}(x^3) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ On peut primitiver le DL sur $[-a,a]$,

$$\text{Ainsi on a } \forall x \in [-a,a],\ F(x) \underset{x\to 0}{=} \underbrace{K}_{=F(0)} + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4)$$

De plus la constante K se calcule avec $x = 0$ ainsi $K = F(0)$ et $\mathcal{O}\left(\frac{x^4}{4}\right) = \mathcal{O}(x^4)$.

Application 1 : **Lien entre les DL de** $\frac{1}{1+x}$ **et DL de** $\ln(1+x)$

$$\left.\begin{array}{r} x \longmapsto \frac{1}{1+x} \textit{ est continue sur }]-1,1[\\ \textit{On sait que : } \frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \mathcal{O}(x^4) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ On peut primitiver le DL sur ,

$$\ln|1+x| \underset{x\to 0}{=} K + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \mathcal{O}(x^5)$$

De plus $K = \ln(1+0) = 0$ et $\forall x \in]-1,1[,\ \ln|1+x| = \ln(1+x)$,

Conclusion : $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \mathcal{O}(x^5)$

Application 2 : **Calcul du DL de** $\arctan(x)$

$$\left.\begin{array}{r} x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2} \textit{ est continue sur } \mathbb{R} \\ \textit{On sait que : } \dfrac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \mathcal{O}(x^8) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ On peut primitiver le DL ,

$$\text{CàD } \arctan(x) \underset{x\to 0}{=} K + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \mathcal{O}(x^9)$$

De plus $K = \arctan(0) = 0$,

$$\textbf{Conclusion} : \arctan x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \mathcal{O}(x^9)$$

Avec la même technique, on peut retrouver les DL en 0 *de* $\arcsin(x)$, *de* $\arccos(x)$,....

Application 3 : **Calcul du DL de** $\tan(x)$

On utilise astucieusement la relation $\tan' = 1 + \tan^2$

3 Interpréter/utiliser les DL.

3.1 Interprétation géométrique.

Théorème 8. Interprétation (géométrique) des DL.

Soit f une fonction avec $f(x) \underset{x\to 0}{=} 2 + 3x - 4x^2 + o(x^2)$.

On a alors

> Le premier terme non nul c'est la PP, ainsi

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 2 + 3x - 4x^2 + o(x^2) \Longrightarrow f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 2$$

> Les termes $a + bx$ donne l'équation de la droite tangente en 0.

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 2 + 3x - 4x^2 + o(x^2) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y = 2 + 3x \text{ est l'équation de la droite tangente en } 0$$

Remarque : il est possible que $a = 0$ ou/et $b = 0$.

> Le signe premier terme non nul après $a + bx$ donne la position par rapport à la tangente.

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 2 + 3x - 4x^2 + o(x^2) \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ $y = 2 + 3x$ est l'équation de la tangente en 0
ET
Comme $-4x^2 < 0$ la fonction est
sous sa tangente au voisinage de 0.

3.2 Transfert de propriétés.

Théorème 9. Transfert de propriétés.

> Calculer les limites

$$\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n \\ v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \end{array}\right\} \implies u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$$

> Majorer, minorer, encadrer.

On suppose que la *Truc* > 0.

$$\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to\infty}{\sim} Truc \\ \textit{Truc est positif} \end{array}\right\} \implies \left| \begin{array}{l} \textit{il existe } N_0 \textit{ tel que} \\ \quad Si\ n \geqslant N_0 \textit{ alors } \quad \frac{1}{2} Truc \leqslant u_n \leqslant 2\, Truc \end{array}\right.$$

> Déterminer les signes

$$\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to\infty}{\sim} Truc \\ \textit{Truc est positif} \end{array}\right\} \implies \begin{array}{l} \textit{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ est positive} \\ \quad \textit{à partir d'un certain rang.} \end{array}$$

Démonstration : > La démonstration est assez évidente.

Comme $u_n \sim v_n$, on a $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, ainsi

$$u_n = \frac{u_n}{v_n}.v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.\ell$$

> Comme on veut montrer une inégalité à partir d'un certain rang, on suit la démarche classique

J'applique la définition de $Quotient = \frac{u_n}{PP} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ avec $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$

ainsi il existe N_0 tel que $Si\ n \geqslant N_0$

$$\frac{1}{2} = \ell - \varepsilon \leqslant \frac{u_n}{PP} \quad \leqslant \ell + \varepsilon = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\implies \frac{1}{2} PP \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{2} PP$$

> Il suffit d'utiliser ce qui précède.

4 Exercices

Exercice 7. Donner les développements limités en 0 à l'ordre n des expressions suivantes :

1. e^{x^2}, $n = 7$
2. $\sin(3x)$, $n = 6$
3. $\frac{1}{1-x^2}$, $n = 7$
4. $\sqrt{1+x}$, $n = 4$
5. $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$, $n = 4$
6. $\ln(1-3x^2)$, $n = 7$
7. $e^x \sin(2x)$, $n = 4$
8. $\frac{\cos(x)}{1+x}$, $n = 4$
9. $\frac{\ln(1 - x/2)\cos(x)}{x}$, $n = 4$

Exercice 8. [Correction] Donner les développements limités en $x = 0$ pour les expressions suivantes

$$\ln\big(\cos(x)\big) \qquad \sqrt{1+\sin(x)} \qquad \frac{x}{\sin(x)} \qquad e^{\cos(x)}$$

Exercice 9. [Correction]

1. On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$

   Déterminer $\lim_{x\to 0} f(x)$ et $\lim_{x\to 0} f'(x)$

2. On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}$

   Déterminer $\lim_{x\to 0} f(x)$ et $\lim_{x\to 0} f'(x)$

3. On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

   Déterminer $\lim_{x\to 0} f(x)$ et $\lim_{x\to 0} f'(x)$

4. On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$

   Déterminer $\lim_{x\to 0} f(x)$ et $\lim_{x\to 0} f'(x)$

Exercice 10. [Correction] Donner les développements limités en 0 à l'ordre n des expressions suivantes

1. Déterminer un équivalent de $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - e$
2. Donner le développement limité de e^x à l'ordre 3 en 2.
3. Donner le développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3 en 2.
4. Donner le développement de $\dfrac{1}{\sin(x)}$ à l'ordre 3 quand $x \to 0$.

Exercice 11. Soit f la fonction définie par l'expression $f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$

1. Déterminer $\mathscr{D}$, l'ensemble de définition de f.
2. Former, **en $+\infty$**, le développement asymptotique de f à la précision $\dfrac{1}{x}$.
3. En déduire l'existence d'une droite asymptote oblique en $+\infty$ à la courbe représentative de f.

   Étudier la position relative de la courbe et de son asymptote en $+\infty$.

Exercice 12. [Correction] Soit f la fonction définie par l'expression $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}$

1. Déterminer $\mathscr{D}$, l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer le $DL_3(0)$ de f.
3. Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 13. Soit f la fonction définie par l'expression $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$

1. Déterminer $\mathscr{D}$, l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer le $DL_2(0)$ de f.

   Déterminer la tangente à la courbe en 0 et leurs positions relatives au voisinage de 0.
3. Montrer que $f(x) \underset{x\to\infty}{=} x + 1 + \dfrac{3}{2x} + \mathscr{O}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

Exercice 14. Soit f la fonction définie par l'expression $f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$.

1. Déterminer $\mathscr{D}$, l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer le $DL_4(0)$ de l'expression $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$.

   En déduire les DL en 0 de la fonction f.

   Peut-on définir $f(0)$?

Exercice 15. Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$\forall x > -1, \quad f(x) = \cos(x)\ln(1+x)$$

En utilisant le DL en 0, calculer $f^{(5)}(0)$.

Exercice 16. Déterminer un équivalent de $(n+1)^{1/n} - n^{1/n+1}$ et de $\sin(x)^{\sin(x)} - x^x$

Correction.

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

$$2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \underset{n\to\infty}{=} 2^n[1+o(1)]\,\frac{\pi}{2^{n+2}}[1+o(1)] = \frac{\pi}{4}[1+o(1)] \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\ln(2n^2+n+1)}{\ln(2n^3+3)} = \frac{Haut}{Bas}$$

$$Or\;\; Haut = \ln(2n^2+n+1) = \ln(2n^2)+\ln\left(1+\frac{n+1}{2n^2}\right) \underset{n\to\infty}{=} \ln(2n^2)[1+o(1)]$$

$$\begin{aligned}
&\underset{n\to\infty}{=} \frac{\ln(2n^2)[1+o(1)]}{\ln(2n^3)[1+o(1)]}\\
&\underset{n\to\infty}{=} \frac{\ln(2)+2\ln(n)}{\ln(2)+3\ln(n)}[1+o(1)]\\
&\underset{n\to\infty}{=} \frac{2\ln(n)[1+o(1)]}{3\ln(n)[1+o(1)]}[1+o(1)]\\
&\underset{n\to\infty}{=} \frac{2}{3}[1+o(1)] \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$$\frac{\sin({}^1/\sqrt{2n}\,)}{\arctan({}^2/_n\,)} \underset{n\to\infty}{=} \frac{{}^1/\sqrt{2n}\;[1+o(1)]}{{}^2/_n\;[1+o(1)]} = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}}[1+o(1)] \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{\ln(2^n+3^n)}{\sqrt{2n^2+n+1}} \underset{n\to\infty}{=} \frac{\ln(3^n)[1+o(1)]}{\sqrt{2n^2}[1+o(1)]} = \frac{n\ln 3}{n\sqrt{2}}[1+o(1)] = \frac{\ln(3)}{\sqrt{2}}[1+o(1)] \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\ln(3)}{\sqrt{2}}$$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé) Rappel : $2^x = e^{x\ln(2)}$

Quand $x\to 0$

on a $2^x = e^{x\ln(2)} \xrightarrow[x\to 0]{} e^0 = 1$ donc $2^x \underset{x\to 0}{\sim} 1$.

Quand $x\to\pm\infty$

on a $2^x = e^{x\ln(2)} \underset{x\to\infty}{\sim} e^{x\ln(2)}$.

Quand $x\to 1$

on a $2^x = 2^{1+h} = 2.2^h = 2.e^{h\ln(2)} \underset{n\to\infty}{=} 2[1+o(1)] \underset{n\to\infty}{\sim} 2$

Quand $x\to a$

on a $2^x = 2^{a+h} = 2^a.2^h = 2^a.e^{h\ln(2)} \underset{n\to\infty}{=} 2^a[1+o(1)] \underset{n\to\infty}{\sim} 2^a$.

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

$$\frac{n(n+1)}{2} \underset{n\to\infty}{=} \frac{n\,n[1+o(1)]}{2}$$
$$\frac{n^3+2n^2-n}{(n+1)(n^2-n)} \underset{n\to\infty}{=} \frac{n^3[1+o(1)]}{n[1+o(1)].n^2[1+o(1)]} = 1[1+o(1)]$$
$$\frac{\ln(n^4+1)}{n+1} \sim \frac{\ln(n^4)[1+o(1)]}{n[1+o(1)]} = \frac{4\ln(n)}{n}[1+o(1)]$$

$$\frac{4x^3-x^2-x}{(2x+1)(x^2-x)} \underset{n\to\infty}{=} \frac{(-x)[1+o(1)]}{(1)[1+o(1)](-x)[1+o(1)]} = 1[1+o(1)]$$
$$\frac{4x^3-x^2-x}{(2x+1)(x^2-x)} \underset{n\to\infty}{=} \frac{4x^3[1+o(1)]}{(2x[1+o(1)])(x^2[1+o(1)])} = 2[1+o(1)]$$
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \underset{n\to\infty}{=} \frac{x[1+o(1)]}{1[1+o(1)]} = x[1+o(1)]$$

$$2^n\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \underset{n\to\infty}{=} 2^n.\frac{\pi}{2^n}[1+o(1)] = \pi[1+o(1)]$$
$$\frac{n^2\ln(1+{}^1/_n)}{\tan({}^\pi/_n)} \underset{n\to\infty}{=} \frac{n^2\,{}^1/_n\,[1+o(1)]}{{}^\pi/_n\,[1+o(1)]} = {n^2}/_\pi\,[1+o(1)]$$
$$\ln(1+e^x) \underset{x\to\infty}{=} \ln(e^x)[1+o(1)] = x[1+o(1)]$$
$$\ln(1+e^x) \underset{x\to0}{=} \ln(1+e^0)[1+o(1)] = \ln(2)[1+o(1)]$$
$$\ln(1+e^x) \underset{x\to-\infty}{=} e^x[1+o(1)]$$

$$\sqrt{\frac{(1-\ln x)(x+2)}{(1-x)\ln(1+x)}} \underset{x\to0}{=} \sqrt{\frac{(-\ln x)(2)[1+o(1)]}{(1[1+o(1)])(x[1+o(1)])}} = \sqrt{\frac{-2\ln x}{x}}[1+o(1)]$$
$$\ln(1+x)+\sin(x) \underset{x\to\infty}{=} \ln(x)[1+o(1)]$$
$$\ln(1+x)+\sin(x) \underset{x\to0}{=} [x+o(x)]+[x+o(x)]$$
$$\underset{x\to0}{=} 2x+o(x) \underset{n\to\infty}{\sim} 2x$$

$$\frac{\ln(x^7+\sqrt[5]{x})}{x^2+1} \underset{x\to\infty}{=} \frac{\ln(x^7)[1+o(1)]}{x^2[1+o(1)]} = \frac{7\ln x}{x^2}[1+o(1)]$$
$$\frac{\ln(x^7+\sqrt[5]{x})}{x^2+1} \underset{x\to0}{=} \frac{\ln(\sqrt[5]{x}[1+o(1)])}{1[1+o(1)]} = \sqrt{\frac{\ln x}{5}}[1+o(1)]$$

$$\ln(n+1)-\ln(n) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{=} \frac{1}{n}[1+o(1)]$$

Solution de l'exercice 6 (Énoncé)

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} \underset{n\to\infty}{=} \frac{\left(\frac{(2n)}{e}\right)^{2n}\sqrt{2\pi\,(2n)}[1+o(1)]}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi\,n}[1+o(1)]\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi\,n}[1+o(1)]} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi\,n}}[1+o(1)]$$

Solution de l'exercice 8 (Énoncé) Ce sont des composées

$$
\begin{aligned}
\ln\Big(\cos(x)\Big) &\underset{x\to 0}{=} \ln\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)\\
&= \ln(1+\square)\\
&= \square - \frac{\square^2}{2}+\frac{\square^3}{3}+o(\square^3)\\
&\qquad \textit{avec} \quad \square = -\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\\
&\qquad\qquad\quad \square^2 = \frac{x^4}{4}+o(x^4)\\
&\qquad\qquad\quad \square^3 = o(x^4)\\
&\qquad\qquad\quad o(\square^3) = o(x^4)\\
&= \left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right) - \frac{\frac{x^4}{4}+o(x^4)}{2}+o(x^4)+o(x^4)\\
&= -\frac{x^2}{2!}+x^4\left[\frac{1}{4!}-\frac{1}{8}\right]+o(x^4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1+\sin(x)} &\underset{x\to 0}{=} \sqrt{1+x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)}\\
&= \sqrt{1+\square}\\
&= 1+\frac{1}{2}\square-\frac{1}{8}\square^2+o(\square^2)\\
&\qquad \textit{avec} \quad \square = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)\\
&\qquad\qquad\quad \square^2 = x^2-x^4\left[\frac{-1}{6}+\frac{-1}{6}\right]+o(x^5)\\
&\qquad\qquad\quad o(\square^2) = o(x^2)\\
&= 1+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)\right)-\frac{1}{8}\left(x^2-x^4\left[\frac{-1}{6}+\frac{-1}{6}\right]+o(x^5)\right)+o(x^2)\\
&= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{\sin(x)} &\underset{x\to 0}{=} \frac{x}{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)}\\
&= \frac{1}{1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+o(x^4)}\\
&= \frac{1}{1+\square}\\
&= 1-\square+\square^2+o(\square^2)\\
&\qquad \textit{avec} \quad \square = -\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+o(x^4)\\
&\qquad\qquad\quad \square^2 = \frac{x^4}{36}+o(x^4)\\
&\qquad\qquad\quad o(\square^2) = o(x^4)\\
&= 1+\left(-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+o(x^4)\right)-\left(\frac{x^4}{36}+o(x^4)\right)+o(x^4)\\
&= 1-\frac{x^2}{3}+x^4\left[\frac{1}{120}-\frac{1}{26}\right]+o(x^4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e^{\cos(x)} &\underset{x\to 0}{=} \exp\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)\\
&= e^1\exp\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)\\
&= e\,e^{\square}\\
&= e\left(1+\square+\frac{\square^2}{2}+o(\square^2)\right)\\
&\qquad \textit{avec} \quad \square = -\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\\
&\qquad\qquad\quad \square^2 = \frac{x^4}{4}+o(x^4)\\
&\qquad\qquad\quad o(\square^2) = o(x^4)\\
&= e\left[1+\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)+\frac{\left(\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right)}{2}+o(x^4)\right]\\
&= e-\frac{e}{2}x^2+x^4e\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{8}\right)+o(x^4)
\end{aligned}
$$

Solution de l'exercice 9 (Énoncé)

1. On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} = \frac{x}{x\,[1+o(1)]} = 1[1+o(1)] \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{\sin(x)}{x}\right]\\
&= \frac{\cos(x)x - \sin(x)}{x^2}\\
&= \frac{\left(1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\right)x - \left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)}{x^2}\\
&= \frac{x[1-1]+x^3\left[\frac{-1}{2}+\frac{1}{6}\right]+o(x^3)}{x^2} = \frac{-1}{3}x+o(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0
\end{aligned}$$

2. On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\\
&= \frac{x-\sin(x)}{x\sin(x)} = \frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)}{x\,x[1+o(1)]} = \frac{\frac{x^3}{3!}+o(x^3)}{x^2\,[1+o(1)]} = \frac{x}{6}[1+o(1)] \xrightarrow[x\to 0]{} 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right]\\
&= -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} + \frac{1}{x^2}\\
&= \frac{-x^2\cos(x)+\sin^2(x)}{x^2\sin^2(x)}\\
&= \frac{-x^2\left(1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\right)+\left(x^2-\frac{2}{3!}x^4+o(x^4)\right)}{x^4[1+o(1)]}\\
&= \frac{x^4\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]+o(x^4)}{x^4[1+o(1)]} = \left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right][1+o(1)] \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

3. On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

   Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$

4. On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$

   Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$

Solution de l'exercice 10 (Énoncé)

1. On a

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e &= e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - e \\
&= e^{n\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]} - e \\
&= e^{1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)} - e \\
&= e\, e^{\square} - e \\
&= e\left(1+\square+\frac{\square^2}{2}+o(\square^2)\right) - e \\
&\quad \textit{avec} \quad \begin{array}{l} \square = -\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \square^2 = -\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ o(\square^2) = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{array} \\
&= e\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}-\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - e \\
&= \frac{-e}{2n}+\frac{5e}{24\,n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

2. On a

$$e^x = e^{2+h} = e^2\, e^h = e^2\left(1+h+\frac{h^2}{2!}+o(h^2)\right) = e^2+e^2 h+\frac{e^2 h^2}{2!}+o(h^2)$$

3. On a

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) = \ln(1+2+h) = \ln(3+h) &= \ln\left[3\left(1+\frac{h}{3}\right)\right] \\
&= \ln(3)+\ln\left(1+\frac{h}{3}\right) \\
&= \ln(3)+\frac{h}{3}-\frac{()^2}{2}+o(h^2) \\
&= \ln(3)+\frac{h}{3}-\frac{h^2}{18}+o(h^2)
\end{aligned}$$

4. On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin(x)} &= \frac{1}{x-\frac{x^3}{3!}\frac{x^5}{5!}+o(x^5)} \\
&= \frac{1}{x\left[1-\frac{x^2}{3!}\frac{x^4}{5!}+o(x^4)\right]} \\
&= \frac{1}{x}\frac{1}{1+\square} \\
&= \frac{1}{x}\left(1-\square+\square^2+o(\square^2)\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(1-\left[-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+o(x^4)\right]+\left[\frac{x^4}{36}+o(x^4)\right]+o(x^4)\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(1+\frac{x^2}{6}+x^4\left[\frac{-1}{120}+\frac{1}{36}\right]+o(x^4)\right) \\
&= \frac{1}{x}+\frac{x}{6}+x^3\left[\frac{-1}{120}+\frac{1}{36}\right]+o(x^3)
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 12 (Énoncé)

1. La fonction n'est pas définie en 0.
2. On a

$$
\begin{aligned}
f(x) = \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \underset{x\to 0}{=} & \frac{1}{x - \frac{x^3}{3!} \frac{x^5}{5!} + o(x^5)} - \frac{1}{x} \\
= & \frac{1}{x\left[1 - \frac{x^2}{3!} \frac{x^4}{5!} + o(x^4)\right]} - \frac{1}{x} \\
= & \frac{1}{x} \frac{1}{1+\square} - \frac{1}{x} \\
= & \frac{1}{x}\left(1 - \square + \square^2 + o(\square^2)\right) - \frac{1}{x} \\
= & \frac{1}{x}\left(1 - \left[-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)\right] + \left[\frac{x^4}{36} + o(x^4)\right] + o(x^4)\right) - \frac{1}{x} \\
= & \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{6} + x^4\left[\frac{-1}{120} + \frac{1}{36}\right] + o(x^4)\right) - \frac{1}{x} \\
= & \frac{x}{6} + x^3\left[\frac{-1}{120} + \frac{1}{36}\right] + o(x^3)
\end{aligned}
$$

3. La fonction se prolonge en $x = 0$ avec $f(0) = 0$
   Le graphe admet une tangente en $x = 0$ d'équation $y = \frac{x}{6}$.
   Comme $\left[\frac{-1}{120} + \frac{1}{36}\right] > 0$, le graphe de fonction f au dessus de sa tangente en 0^+ et en dessous de sa tangente en 0^-