Nom Lundi 17 Octobre.

Exo 1. Énoncer le théorème de Taylor-Young.

Application : Avec la formule de Taylor-Young, démontrer : $\dfrac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$

Exo 2. Énoncer le théorème de primitivation des DL.
Application : Déterminer le DL de arccos en $x = 0$

Exo 3. On considère la suite (H_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$.

1. Étudier la monotonie de la suite.
2. Montrer que : $\forall\, n \geqslant 1$, $H_{2n} - H_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.
3. En déduire que la suite ne converge pas dans $\mathbb{R}$. En déduire la série $\sum {}^1\!/_n$ diverge.

Nom Lundi 17 Octobre.

Exo 1. En utilisant les sommes géo, démontrer que : $\dfrac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1-x+x^2+o(x^2)$

Puis en déduire que : $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.

Exo 2. Donner le DL $(1+x)^{\alpha}$, calculer, l'aide de factoriel, $\prod\limits_{\substack{k=1\\ k\,tous}}^{n} k$, $\prod\limits_{\substack{k=1\\ k\,pair}}^{n} k$ et $\prod\limits_{\substack{k=1\\ k\,impair}}^{n} k$.

En déduire la valeur de $\alpha\,(\alpha-1)\dots\big(\alpha-(n-1)\big)$ avec $\alpha = {}^1/_2$

> On sait que : $(1+x)^{\alpha} = 1+\alpha x+\alpha(\alpha-1)\dfrac{x^2}{2!}+\dots+\alpha\,(\alpha-1)\dots\big(\alpha-(n-1)\big)\,\dfrac{x^n}{n!}+o(x^2)$

> On a "facilement" $\prod\limits_{\substack{k=1\\ k\,tous}}^{n} = n!$

$$\prod_{\substack{k=1\\ k\,pair}}^{n} k = \lfloor {}^n/_2 \rfloor !\; 2^{\lfloor {}^n/_2 \rfloor}$$

$$\prod_{\substack{k=1\\ k\,impair}}^{n} k = \frac{\prod^{n}_{\substack{k=1\\ k\,tous}}}{\prod^{n}_{\substack{k=1\\ k\,pair}} k} = \frac{n!}{\lfloor {}^n/_2 \rfloor !\; 2^{\lfloor {}^n/_2 \rfloor}}$$

> Ainsi on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\cdots\left(\frac{-(2n-3)}{2}\right)\\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\times 1.3.5...(2n-3)\\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\,\frac{(2n-3)!}{\lfloor {}^{(2n-3)}/_2 \rfloor !\; 2^{\lfloor {}^{(2n-3)}/_2 \rfloor}}\\
&\quad Or\ \lfloor {}^{(2n-3)}/_2 \rfloor = \left\lfloor n-\frac{3}{2}\right\rfloor = n-2\\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\,\frac{(2n-3)!}{(n-2)!\;2^{n-2}}
\end{aligned}$$

> Bonus : quand $\alpha = {}^1/_2$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha\,(\alpha-1)\dots\big(\alpha-(n-1)\big)}{n!} &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\,\frac{(2n-3)!}{(n-2)!\;2^{n-2}}\,\frac{1}{n!}\\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-2}}\,\frac{(2n-3)!}{(n-2)!\;n!}\\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-2}}\,\frac{(2n-2)!}{2(n-1)!\;(n-1)!n}\\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}\;n}\binom{2n-2}{n-1}
\end{aligned}$$

Exo 3. Définition de la série $\sum u_n$ converge

Montrer que la série $\sum q^n$ converge Ssi $q \in\,]-1,1[$ et calcul de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$.

Exo 1. Énoncer le théorème de primitivation des DL.
Déterminer le DL de $\tan(x)$ en $x = 0$ avec 3 termes.

Exo 2. Donner le DL $(1+x)^\alpha$. Calculer, l'aide de factoriel, $\prod_{\substack{k=1 \\ k\ tous}}^{n} k$, $\prod_{\substack{k=1 \\ k\ pair}}^{n} k$ et $\prod_{\substack{k=1 \\ k\ impair}}^{n} k$.
En déduire la valeur de $\alpha\,(\alpha-1)\ldots\big(\alpha-(n-1)\big)$ avec $\alpha = {}^{-1}/_{2}$

> On sait que : $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \alpha\,(\alpha-1)\ldots\big(\alpha-(n-1)\big)\,\dfrac{x^n}{n!} + o(x^2)$

> On a "facilement" $\displaystyle\prod_{\substack{k=1 \\ k\ tous}}^{n} = n!$

$$\prod_{\substack{k=1 \\ k\ pair}}^{n} k = \lfloor {}^{n}/_{2} \rfloor !\, 2^{\lfloor {}^{n}/_{2} \rfloor}$$

$$\prod_{\substack{k=1 \\ k\ impair}}^{n} k = \frac{\prod^{n}_{\substack{k=1 \\ k\ tous}}}{\prod^{n}_{\substack{k=1 \\ k\ pair}} k} = \frac{n!}{\lfloor {}^{n}/_{2} \rfloor !\, 2^{\lfloor {}^{n}/_{2} \rfloor}}$$

> Ainsi on a

$$\begin{aligned}
\frac{-1}{2}\left(\frac{-1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{-1}{2}-(n-1)\right) &= \left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\cdots\left(\frac{-(2n-1)}{2}\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{2^n} \times 1.3.5...(2n-1) \\
&= \frac{(-1)^n}{2^n}\,\frac{(2n-1)!}{\lfloor {}^{(2n-1)}/_{2} \rfloor !\, 2^{\lfloor {}^{(2n-1)}/_{2} \rfloor}} \\
&\quad Or\ \lfloor {}^{(2n-1)}/_{2} \rfloor = \left\lfloor n - \frac{1}{2} \right\rfloor = n-1 \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\,\frac{(2n-1)!}{(n-1)!\,2^{n-1}}
\end{aligned}$$

> Bonus : quand $\alpha = {}^{1}/_{2}$, on a
$$\begin{aligned}
\frac{\alpha\,(\alpha-1)\ldots\big(\alpha-(n-1)\big)}{n!} &= \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\,\frac{(2n-1)!}{(n-1)!\;n!} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-2}}\,\frac{(2n)!}{2(n)!\,(n)!} \\
&= \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\binom{2n}{n}
\end{aligned}$$

Exo 3. On considère la suite (H_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

1. Montrer que : il existe N_0 tel que $\forall\, k \geqslant N_0,\ \dfrac{1}{k} \geqslant \dfrac{1}{2}\,[\ln(k+1) - \ln(k)]$
2. En déduire que : la série $\sum {}^{1}/_{n}$ diverge.