

Programme de colle de la semaine 19

du Lundi 10 Mars au Vendredi 14 Mars.

Questions de cours et autour du cours.

> Série.

Définition de la série $\sum u_n$ converge.

Démontrer que : Lorsque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge.

> Série Géométrique.

Définition de la série $\sum u_n$ converge

Montrer que la série $\sum q^n$ Ssi $q \in]-1, 1[$ et calcul de $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$.

> Série/Intégrale.

Montrer que la fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ est décroissante sur $[3, +\infty[$

En déduire, à l'aide d'une comparaison Série/Intégrale, que la série $\sum \frac{\ln(n)}{n}$ diverge.

> Série Télescopique.

On considère $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$

En utilisant la série télescopique, montrer que la suite $(S_n - 2\sqrt{n})$ converge

En déduire le développement, quand $n \rightarrow \infty$, avec 2 termes de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$

> Absolument convergente ou A-cv.

Définition de : La série $\sum a_n$ est A-cv.

Propriétés de $a_n^+ = \max(a_n, 0)$ et $a_n^- = \max(-a_n, 0) = -\min(a_n, 0)$

Démonstration : Si la série $\sum a_n$ est A-cv alors la série $\sum a_n$ converge.

> Absolument convergente ou A-cv.

Définition de : La série $\sum a_n$ est A-cv.

Propriétés de $a_n^+ = \max(a_n, 0)$ et $a_n^- = \max(-a_n, 0) = -\min(a_n, 0)$

Démonstration : Si la série $\sum a_n$ est A-cv alors la série $\sum a_n$ converge.

> Série Alternée

Définition de : La série est alternée.

Énoncé et Démonstration du critère spéciale des séries alternées

> EXERCICE 46 de la Banque CCP.

On considère la série : $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha \frac{\pi}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$ converge.
3. $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$ converge-t-elle absolument?

Exercices

Des séries : Attention le critère de d'Alembert n'est pas au programme de sup