Algèbre linéaire

Exercice 1. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$ et on note $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ sa base classique.

On considère les fonctions suivantes

$$f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X] \; ; \; P \longmapsto \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right]$$
$$\phi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R} \; ; \; P \longmapsto P(1)$$

On convient que $f^0 = id$ et que $f^n = f \circ \ldots \circ f$

1. Justifier que ϕ est un morphisme de $\mathbb{R}_2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   En ce que ϕ est le morphisme nul ? En déduire que $\mathrm{Im}(\phi) = \mathbb{R}$.
   Déterminer une base et la dimension du noyau.
2. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Soit les polynômes $P_0 = 1$, $P_1 = -2X + 1$, $P_2 = 6X^2 - 6X + 1$.
   (a) Justifier que : $\mathscr{C} = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) On note $E_\lambda = \ker\left(f - \lambda\, id\right)$
   Calculer $f(P_0), f(P_1), f(P_3)$ en fonction de P_0, P_1 et P_2
   En déduire que $P_0 \in E_1$, que $P_1 \in E_{1/2}$ et que $P_1 \in E_{1/4}$
4. Soit le polynôme $P = a + bX + cX^2$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}$.
   (a) Déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathscr{C}$
   (b) En utilisant la question Q3b., calculer $[\phi \circ f^n](P)$ en fonction de a, b, c.
   (c) En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} [\phi \circ f^n](P) = \int_0^1 P(t)\,dt$

Polynôme

Exercice 2. On considère la fonction $f$définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$
Il est clair que la fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que
$$\forall x > 1, \; f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)e^x}{(1-x)^{n+1}}$$
   De plus exprimer $P_{n+1}(x)$ en fonction de $P_n(x)$ et de $P_n'(x)$
2. Calculer P_0, P_1 et P_2
   Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.
3. Montrer que sur $]1, +\infty[$, f est solution de l'EDL1 : $(x-1)y' - (x-2)y = 0$
   En utilisant la formule de Leibniz, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x > 1$, $P_{n+1}(x) = (n+2-x)P_n(x) + n(x-1)P_{n-1}(x)$.
4. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, la relation $P_n' = -nP_{n-1}$.

Série

Exercice 3. Règle de d'Alembert

On considère dans cet exercice une série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ à termes strictement positifs, CàD $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$

On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$

et on souhaite en déduire la nature de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ de la valeur de ℓ.

1. On suppose dans cette question que $\ell > 1$.
   (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang.
   (b) En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est divergente.
2. On suppose dans cette question que $\ell \in [0,1[$. On fixe un réel $K \in]\ell;1[$ par exemple $K = \frac{\ell+1}{2}$
   (a) Montrer qu'il existe une constante C et un rang N_0 telle que $\forall\, n \geqslant N_0,\ u_n \leqslant C \times K^n$.
   (b) En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente.
3. En considérant les séries $\sum \dfrac{1}{n}$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$, montrer que lorsque $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

   En résumé (et cette propriété sera au programme de spé) :
   — Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell > 1$ alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est divergente.
   — Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell < 1$ alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente.
   — Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell = 1$, on ne peut pas conclure quant à la nature de la série.
4. Une application.
   En utilisant le critère d'Alembert, déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{1}{\binom{2n}{n}}$.
5. On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to\infty}{=} \ell + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ avec $\ell > 0$.
   En considérant la série télescopique, montrer que la suite $\left(\ln \dfrac{u_n}{\ell^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   En déduire qu'il existe une constante a tel que : $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} a.\ell^n$

Math classique

Exercice 4. [Correction] Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $f(t)=\dfrac{e^t}{t}$

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ fixé.
   (a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[e,+\infty[$.
   (b) Montrer que : $e\leqslant\displaystyle\int_n^{n+1}f(t)\,dt$
   (c) Justifier que l'équation $f(X)=\displaystyle\int_n^{n+1}f(t)\,dt$
   admet une unique solution dans $[1,+\infty[$
   On note u_n cette solution. On a donc $f(u_n)=\dfrac{e^{u_n}}{u_n}=\displaystyle\int_n^{n+1}f(t)\,dt$

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$
   (a) Montrer que : $\dfrac{e^n}{n}\leqslant\displaystyle\int_n^{n+1}f(t)\,dt\leqslant\dfrac{e^{n+1}}{n+1}$
   (b) En déduire que un encadrement de u_n puis que $u_n\underset{n\to\infty}{\sim}n$

3. Comme $u_n\underset{n\to\infty}{\sim}n$, CàD $u_n\underset{n\to\infty}{=}n+o(n)$, on décide d'écrire $u_n=n+a_n$ avec $a_n=o(n)$
   (a) Montrer que : $\forall\,n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{e^t}{t}\,dt=\frac{e^{n+1}}{n+1}-\frac{e^n}{n}+\int_n^{n+1}\frac{e^t}{t^2}\,dt$
   (b) Déterminer un équivalent (quand $n\to+\infty$) de $A_n=\dfrac{e^{n+1}}{n+1}-\dfrac{e^n}{n}$
   (c) Démontrer, à l'aide d'un encadrement, que $B_n=\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{e^t}{t^2}\,dt\underset{n\to\infty}{=}o\left(e^n/n\right)$
   (d) Démontrer que $a_n=\ln\left[\dfrac{u_n}{e^n}(A_n+B_n)\right]$
   La suite (a_n) converge-elle ?