TD 19 Morphisme-Dimension

Jeudi 06 Février 2025

Un peu de théorie

Exercice 1. [Correction] Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $f, g \in \mathscr{L}(E)$.
On suppose que f et g commutent , CàD $f \circ g = g \circ f$.

Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g

Exercice 2. [Correction] On considère les fonctions f et g

$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X],\ f(P) = P' \ et\ g(P) = XP.$$

1. Montrer que f et g sont des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$ et calculer $f \circ g - g \circ f$
2. Étudier l'injectivité de f et de g.
3. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ f \circ g^n - g^n \circ f = n\, g^{n-1}$.
   Rappel : $g^n = g \circ g \circ \cdots \circ g$.

Intersection/somme.

Exercice 3. On considère dans $\mathbb{R}^3$.

$$F = vect(\,(2, 1, -2)\,) \quad et \quad G = \left\{ \overrightarrow{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0 \right\}.$$

1. Déterminer les dimensions de F et G.
2. Déterminer $F \cap G$. En déduire que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
3. En utilisant les bases, montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

Exercice 4. Soit La matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On considère la fonction f définie par : $\forall\, \overrightarrow{U} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ f(\overrightarrow{U}) = A\overrightarrow{U}$, c'est la fonction associée à la matrice A.
On considère les ensembles $E_3 = \ker(f - 3\,id) \quad et \quad E_{-3} = \ker(f + 3\,id)$

1. Montrer que E_{-1} et E_3 sont des ssev, et déterminer une base et la dimension de chacun.
2. Montrer que $E_{-3} \oplus E_3 = \mathbb{R}^3$.
3. En déduire une méthode pour calculer $f^n(\overrightarrow{U}) = [f \circ f \circ \cdots \circ f](\overrightarrow{U})$.

Exercice 5. [Correction] On se place dans $\mathbb{R}_n[X]$. On considère

$$F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que } P(1) = 0 \text{ et } P(2) = 0\} \text{ et } G = vect(1, X)$$

1. Autour de G.

   Démontrer que G est un ssev et calculer $\dim G$.
2. Autour de F.

   Démontrer que F est un ssev et que $\dim F = n - 1$.
3. Montrer que $F \cap G = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$
4. Démontrer que $F \oplus G = \mathbb{R}_n[X]$

Exercice 6. Soit $\mathbb{E} = \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On considère les ensembles $F = \{f \in \mathbb{E},\ f(0) = 0\}$ et $G = vect(\cos)$.

1. Démontrer que $F \cap G = \{0\}$
2. On fixe une fonction $h \in \mathbb{E}$.

   On suppose qu'il existe deux fonctions $f \in G$ et $g \in G$ tel que $h = f + g$.

   $>$ Donner les propriétés de f et de g.
   $>$ Déterminer f et g.
   $>$ Conclure que : $\mathbb{E} = F + G$

Sympa

Exercice 7. [Correction] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non nulle.
On considère la fonction f définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(M) = M + tr(M)A$$

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}\Big(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\Big)$.
2. On va déterminer $Ker(f)$
   (a) Montrer que : $\ker(f) \subset vect(A)$
   (b) Étudier si $vect(A) \subset \ker(f)$ et conclure que

   Si $tr(A) = -1$ alors $\ker(f) = vect(A)$.
   Si $tr(A) \neq -1$ alors $\ker(f) = \{0\}$.
3. En utilisant le théorème du rang, montrer que la fonction est surjective.
4. On suppose que $tr(A) \neq -1$.

   Montrer que $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe un unique $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que : $C + tr(C)A = B$.

Exercice 8. Cet exercice est plus difficile et est "super sympa"

On se place dans $\mathbb{R}_n[X]$.
Soit A et B deux polynômes non nul $\mathbb{R}_n[X]$.
On note α le degré de $A = A(X)$ et β le degré de $B = B(X)$

On suppose aussi que : $\alpha + \beta = n + 1$

1. On note F_A (resp. F_B) l'ensemble des polynômes multiple de A (resp. B).

   Montrer que F_A est un ssev de dimension $n - \alpha + 1$.

   On suppose en plus que les polynômes A et B sont premiers entre eux.
2. Montrer, en utilisant le théorème de Gauss, que : $F_A \cap F_B = \{\overrightarrow{0}\}$
3. Grassmann is good ! ! !

   Justifier que : $1 \in F_A + F_B$.
   En pratique, qu'est ce que cela signifie ?