Classique

Exercice 1. On rappelle que : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ (formule de Stirling).

Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer un équivalent de $(2n)!$ et de $\binom{2n}{n}$
et *facultatif* de $(n+1)!$. Question bonus : Pourquoi est-ce facultatif ?

Exercice 2. [Correction]

1. Déterminer la DL avec 3 termes de $\ln(n)$, $\ln(n+1)$ et $\ln(n+2)$
2. En discutant en fonction de de a, b, donner l'équivalent de $a\ln(n+2) + b\ln(n+1) + \ln(n)$

Exercice 3. Soit f la fonction définie par l'expression

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x e^{t^2}\,dt = \frac{1}{x}\left[Prim(x) - Prim(0)\right] \qquad \textit{avec Prim une primitive}$$

1. Déterminer le $DL_4(0)$ de l'expression $f(x)$.
2. En déduire la limite $f(x)$ quand $x \to +\infty$

Banque CCP

Exercice 4. [Correction] **D'après Exo N°6** Déterminer 2 termes dans le développement de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Application : Déterminer un équivalent de $\dfrac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$

Exercice 5. **D'après Exo N°1** Déterminer le DL de $\sinh$ et $\tan$

Application Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n = \mathrm{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 6. **D'après Exo N°51** On rappelle que : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ (formule de Stirling).

Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer un équivalent $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$

Exercice 7. **D'après Exo N°45**

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire le développement de $\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

Un air de série

Exercice 8. Vers La constante d'Euler

On considère $u_n = H_n - \ln(n) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$

Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{n^2}$

Exercice 9. Vers la formule de Stirling

On considère les suites $u_n = \dfrac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}$

$>$ Vérifier que : $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$>$ En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{n^2}$

Bonus

Exercice 10. [Correction] On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 \in]0,1] \quad \text{et} \quad \forall\, n,\ u_{n+1} = \sin(u_n).$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. On considère la suite (v_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = (u_{n+1})^\alpha - (u_n)^\alpha$
   (a) On remarque que $v_n = (u_{n+1})^\alpha - (u_n)^\alpha = (\sin u_n)^\alpha - (u_n)^\alpha = \sin(\square) - \square$ avec $\square = u_n$.
   Faites un DL quand $n \to \infty$
   (b) Discuter en fonction de α si la suite (v_n) converge vers $\ell = 0$, $\ell \neq 0$ ou $\ell = \infty$
   (c) On choisit tel que la suite (v_n) converge vers $\ell \neq 0$

   $>$ En utilisant Cesàro, montrer que : $\dfrac{v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$

   $>$ En déduire un équivalent du nombre u_n quand $n \to +\infty$